

L.Z. GEVORGYAN

GENERAL RATIONAL INTERPOLATION

The necessary and sufficient conditions on the distribution of nodes and magnitudes of weights in general rational interpolation formula are revealed, ensuring the reproduction property of lower degree polynomials.

Keywords: rational interpolation, nodes and weights of the interpolation formula, polynomial reproducing property.

УДК 517.53

В.Г. ПЕТРОСЯН

ТЕОРЕМЫ ТИПА НЕВАНЛИННЫ ДЛЯ НОВЫХ “ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ” ЗНАЧЕНИЙ

Получены теоремы типа соотношения дефектов Р. Неванлинны для новых “исключительных” значений.

Ключевые слова: теория Р. Неванлинны, теория Л. Альфорса, свойство близости a -точек.

1. Введение. Одной из основных характеристик в классической теории распределения значений Р. Неванлинны является функция приближения (см. [1])

$$m(r, a) = m(r, a, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |w(re^{i\varphi} - a)|^{-1} d\varphi, \quad a \in \mathbb{C},$$

которая показывает, насколько близки значения мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a \in \mathbb{C}$ на дугах $\Delta(r, a) = \Delta(r, a, w) = \{z : |z| = r; |w(z) - a| \leq 1\}$ окружности $|z| = r$. Функция $m(r, a)$ есть норма $\|\ln^+ |w(z) - a|^{-1}\|$ в метрике $L_1[0, 2\pi]$.

С конца 60-ых годов активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a , а именно (см. [2-7]), величина

$$L(r, a) = L(r, a, w) = \max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что функция $L(r, a)$ характеризует скорость приближения $w(z)$ к числу a в более сильной метрике, чем $L_{[0, 2\pi]}^1$.

Установлены многочисленные аналоги в поведении функций $m(r, a)$ и $L(r, a)$, составляющие сегодня предмет теории роста В.П. Петренко (см.[2]).

В работах [8, 9] вводятся новые характеристики близости, которые учитывают поведение производных высшего порядка функции $w(z)$, близкой к значению a .

Мы имеем в виду следующие величины ($z = re^{i\varphi}, k \in N$):

$$P_k(r, a) = r \int_{\Delta(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - a)|^{\frac{1}{k}} d\varphi, \quad Q_k(r, a) = r \int_{\Delta(r, a)} \left| \frac{w^{(k)}(z)}{w(z) - a} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi.$$

Оказывается, что величины $P_k(r, a)$ и $Q_k(r, a)$ обнаруживают свойства, аналогичные свойствам функций приближения $m(r, a)$, т.е. для них выполняются аналог второй основной теоремы Р. Неванлинны и, соответственно, аналог соотношения дефектов, характеризующих уже новые “исключительные” значения.

Доказано, что для мероморфной в \mathbb{C} функции $w(z)$ конечного нижнего порядка λ множество значений a , в которых

$$D_k(a) = D_k(a, w) = \liminf_{r \rightarrow \infty} (P_k(r, a)T(r)) > 0,$$

не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$\sum_{(a)} D_k(a) \leq K_0(k, \lambda), \quad (1.1)$$

где $K_0(k, \lambda)$ - постоянная, зависящая от k и λ , и аналогично, множество значений a , в которых

$$B_k(a) = B_k(a, w) = \liminf_{r \rightarrow \infty} (Q_k(r, a)T(r)) > 0,$$

не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$\sum_{(a)} B_k(a) \leq K_0(k, \lambda). \quad (1.1')$$

Ясно, что оценки величины $P_k(r, a)$ являются одновременно оценками производных порядка k функции $\ln|w(z) - a|^{-1}$, являющейся мерой близости

$w(z)$ к a . Укажем также другие точки зрения, согласно которым изучение величин $P_k(r, a), Q_k(r, a)$ представляет интерес.

На актуальность изучения таких объектов указывает следующее простое предложение, связывающее $P(r, a) = P_1(r, a) = Q_1(r, a)$ с классическими характеристиками: если мероморфная в \mathbb{C} функция имеет, по крайней мере, два дефектных значения в смысле В.П. Петренко, т.е. существуют значения a_1 и a_2 , для которых $\beta(a_1) > 0, \beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (L(r, a)T(r)) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} \left(\max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1} / T(r) \right),$$

то для любого $a \in \mathbb{C}$ и r представлены неравенства

$$m(r, a) \leq L(r, a) \leq P(r, a) + O(1), r \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

Таким образом, оценки сверху величин $P(r, a)$ одновременно являются оценками дефектов $\delta(a) = \varliminf_{r \rightarrow \infty} (m(r, a)T(r))$ и $\beta(a)$.

Получение окончательных результатов в теории мероморфных функций зачастую упирается в оценки логарифмических производных функций $w(z)$, которые, однако, рассматривались как вспомогательные технические средства (см. [1, 2, 10-12]).

Поскольку величины $P(r, a)$ определяются посредством логарифмической производной функции $w(z)$ и для них устанавливаются соотношения дефектов, то эти величины становятся объектом самостоятельного изучения.

Для величин $P_k(r, a)$ и $Q_k(r, a)$ установлены аналоги известного тождества Картана, эквивалентного, например для $P_k(r, a)$, следующему соотношению (см. [13-15]):

$$\int_0^{2\pi} P_k(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Из соотношений (1.2) и (1.3) следует соотношение типа Картана в теории роста мероморфных функций:

$$\int_0^{2\pi} L(r, e^{i\theta}) d\theta = o[T(r)], \quad r \rightarrow \infty.$$

Отметим, что этот результат отсутствовал в этой теории. А из соотношений (1.1) и (1.2) вытекает известный результат В. Фукса о $\sum \delta^{\frac{1}{2}}(\alpha)$ (см.[10]).

В работах [16] и [17] получены оценки типа $\sum \delta^\alpha$ для мер исключительности $D(\alpha) = D_1(\alpha)$.

Пусть $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 1$, $\rho \in (0,1)$ - фиксированные числа. Обозначим

$$E_\alpha(R) = E_{\alpha_1}^{\alpha_2}(R) = \{r : \alpha_1 R \leq r \leq \alpha_2 R\};$$

$$P_k^*(r, \alpha) = r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - a) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi, \quad a \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi},$$

где $\Delta_\rho(r, a) = \{z : |z| = r, |w(z) - a| \leq \rho\}$.

В данной статье обобщаются результаты работы [17] и получается аналогичный результат для мер исключительности $B_k(a)$.

Теорема 1.1. Пусть $w(z)$ - мероморфная в \mathbb{C} функция конечного нижнего порядка λ ; $a_\nu \in \mathbb{C}, \nu = 1, 2, \dots, n, a_i \neq a_j$, при $i \neq j$. Тогда выполняется неравенство

$$\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{P_k^*(r, a_\nu)}{|\Delta_\rho(r, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \right\} dr \leq K(k, \lambda) T(cR) R, \quad R > R_0, \quad (1.4)$$

где $T(z)$ - неванлинновская характеристика; $|\Delta_\rho(r, a_\nu)|$ - угловая мера множества $\Delta_\rho(r, a)$; $\varepsilon \in (0,1)$ - фиксированное число; $K(k, \lambda)$ - постоянная, зависящая от k и λ , $1 < c = \text{const} < \infty$.

Теорема 1.2. В условиях теоремы 1.1 выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{\nu=1}^n D_k^{\frac{1}{2} + \varepsilon_1}(a_\nu) \leq K(k, \lambda), \quad (1.5)$$

где $\varepsilon_1 = 1/(6 - 4\varepsilon)$.

Теорема 1.3. В теореме 1.2 неравенство (1.5) можно заменить следующим неравенством:

$$\sum_{\nu=1}^n D_2^{\frac{1}{2} + \varepsilon_1}(a_\nu) \leq K(k, \lambda). \quad (1.6)$$

Следствие 1.1. При условиях теоремы 1.1 выполняется

$$\sum_{v=1}^n \delta^{\frac{1}{3}+\varepsilon_2} (a_v) \leq K(\lambda), \quad (1.7)$$

где $\varepsilon_2 = 1/(15-9\varepsilon)$.

Следствие 1.2. При условиях теоремы 1.1 имеет место неравенство

$$\sum_{v=1}^n \beta^{2+\varepsilon_1} (a_v) \leq K(\lambda). \quad (1.8)$$

2. Вспомогательные результаты. Обозначим

$$J_k(r, a, b) = r \int_{\Delta_p(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi, \quad a, b \in \mathbb{C}, z = re^{i\varphi}, k \in \mathbb{N}.$$

В доказательствах лемм используем неравенство Гельдера для $p = 2 - \varepsilon$, $q = (2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$.

Лемма 2.1. Пусть $w(z)$ - мероморфная в \mathbb{C} функция; $a, b \in \mathbb{C}, |a - b| > 2$.

Тогда выполняется следующее соотношение:

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{J_k(r, a, b) dr}{|\Delta_p(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = o[T(\beta R, w)]R, \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

где $T(z)$ - неванлинновская характеристика; $|\Delta_p(r, a)|$ - угловая мера множества $\Delta_p(r, a)$; $1 < \beta = \text{const} < \infty$; $\varepsilon \in (0, 1)$ - фиксированное число.

Доказательство. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$J_k(r, a, b) \leq r \left[\int_{\Delta_p(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{2-\varepsilon}{k}} d\varphi \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \cdot |\Delta_p(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}. \quad (2.2)$$

Поскольку при $z \in \Delta_p(r, a), |w(z) - b| > 1$, то имеем

$$J_1(r, a, b) \leq r \cdot \left[\int_{\Delta_p(r, a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon} d\varphi \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \cdot |\Delta_p(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Отсюда, учитывая, что $|w(z)| < 1 + |a|$, $z \in \Delta_p(r, a)$, то, используя метод доказательств леммы 2.1 работы [17], получим утверждение леммы при $k = 1$.

Теперь предположим, что $k \geq 2$, тогда $(2 - \varepsilon)/k < 1$. Обозначим через $\{z_i(b)\}$ и $\{b_j\}$ соответственно b -точки и полюсы функции $w(z)$, лежащие в круге $|z| < R' = a_3 R$. Используя формулу Неванлинны и следующее неравенство:

$$\left(\sum_v c_v \right)^\alpha \leq \sum_v c_v^\alpha, \quad c_v \geq 0, 0 < \alpha < 1, \quad (2.3)$$

получим

$$\begin{aligned} \bar{J}_k(r, a, b) &\stackrel{\text{def}}{=} r \left[\int_{\Delta_p(r, a)} \left| \ln^{(k)}(w(z) - b) \right|^{\frac{2-\varepsilon}{k}} d\varphi \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leq \\ &\leq Kr \left[\int_{\Delta_p(r, a)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \ln |w(R'e^{i\theta}) - b| \right| \frac{R'e^{i\theta} d\theta}{|R'e^{i\theta} - z|^{k+1}} \right)^{\frac{2-\varepsilon}{k}} d\varphi \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + \\ &+ Kr \left[\sum_{|z_i(b)| < R' \Delta_p(r, a)} \int \frac{d\varphi}{|z - z_i(b)|^{2-\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + Kr \left[\sum_{|z_i(b)| < R' \Delta_p(r, a)} \int \frac{|z_i(b)|^{2-\varepsilon} d\varphi}{|(R')^2 - z_i(b)z|^{2-\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + \\ &+ Kr \left[\sum_{|b_j| < R' \Delta_p(r, a)} \int \frac{d\varphi}{|z - b_j|^{2-\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + \\ &+ Kr \left[\sum_{|b_j| < R' \Delta_p(r, a)} \int \frac{|b_j|^{2-\varepsilon} d\varphi}{|(R')^2 - b_j z|^{2-\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} = J_1(r) + \dots + J_5(r)^*. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нетрудно видеть, что

$$J_1(r) \leq K_1 r \{ m(R', w) + m(R', b) + O(1) \}^{\frac{1}{k}} R^{-1}.$$

Отсюда, учитывая следующее соотношение:

$$T(r, 1/(w-b)) = T(r, w) + O(1), \quad (2.5)$$

получим

$$\int_{E_\alpha(R)} J_1(r) dr = K_1 T^{\frac{1}{k}}(R', w) \cdot R. \quad (2.6)$$

Обозначим $D_{z_0}(r) = \{z : |z - z_0| < r\}$. Используя неравенство Гельдера, получим

$$\int_{E_\alpha(R)} J_2(r) dr \leq K_2 R^{\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}} \left[\sum_{|z_i(b)| < R'} \iint_{D_{z_i(b)}(2R)} \frac{r dr d\varphi}{|z - z_i(b)|^{2-\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leq K_2 [n(R', b)]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \cdot R,$$

где $n(R', b)$ - число b -точек функции $w(z)$ с учетом кратностей, принадлежащих кругу $|z| < R'$.

Отсюда, учитывая, что $n(R', b) \leq N(\beta R, b) / \ln \beta + O(\ln R)$, $(\beta > 1)$, и соотношение (2.5), получим

$$\int_{E_\alpha(R)} J_2(r) dr \leq K_2 \cdot T^{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\beta R, w) \cdot R, \quad R > R_0. \quad (2.7)$$

* В дальнейшем обозначим через $K, K_i, i=1, 2, \dots$ постоянные, необязательно одинаковые даже на протяжении одной цепочки неравенств.

Обозначим $|z_0| < R'$ через

$$D(z_0, R) = \left\{ z : (R')^2 / |z_0| - \alpha_2 R \leq |z_0 - (R')^2 / |z_0|| \leq \alpha_2 R + (R')^2 / |z_0| \right\}.$$

Тогда, исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что

$$\int_{E_\alpha(R)} \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{|z_0|^{2-\varepsilon} r dr d\varphi}{|(R')^2 - \bar{z}_0 z|^{2-\varepsilon}} \leq \iint_{D(z_0, R)} \frac{r dr d\varphi}{|z - (R')^2 / |z_0||^{2-\varepsilon}} \leq K R^\varepsilon. \quad (2.7')$$

Используя это неравенство и неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha(R)} J_3(r) dr &\leq K_3 R^{\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}} \left[\sum_{|z_i(b)| < R'} \iint_{D_{z_i(b)}(2R)} \frac{|\bar{z}_i(b)|^{2-\varepsilon} r dr d\varphi}{|(R')^2 - \bar{z}_i(b) \cdot z|^{2-\varepsilon}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leq \\ &\leq K_3 [n(R', b)]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \cdot R \leq K_3 T^{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\beta R, w) \cdot R. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_{E_\alpha(R)} J_4(r) dr \leq K_4 T^{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\beta R, w) \cdot R, \quad (2.9)$$

$$\int_{E_\alpha(R)} J_5(r) dr \leq K_5 T^{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\beta R, w) \cdot R. \quad (2.10)$$

Окончательно из соотношений (2.2), (2.4), (2.6)-(2.10) получим утверждение леммы.

Обозначим $(z = re^{i\varphi})$

$$P_k^{**}(r, a) = \int_{\Delta_\rho^*(r, a)} |\ln^{(k)} w(z) - a|^{\frac{1}{k}} d\varphi,$$

где $\Delta_\rho^*(r, a) = \{z : |z| = r, \rho \leq |w(z) - a| \leq 1\}$.

Поскольку при $z \in \Delta_\rho^*(r, a)$, $|w(z) - a| \geq \rho$, $|w(z)| \leq 1 + |a|$, то, используя метод доказательства леммы 2.1, получим следующую лемму:

Лемма 2.2. Пусть \mathbb{C} - мероморфная в \mathbb{C} функция. Тогда имеет место неравенство

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{P_k^{**}(r, a) dr}{|\Delta_\rho^*(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = o[T(\beta R, w)] \cdot R, \quad R \rightarrow \infty, \quad (2.11)$$

где $T(r)$ - неванлинновская характеристика; $|\Delta_\rho^*(r, a)|$ - угловая мера множества $\Delta_\rho^*(r, a)$; $1 < \beta = \text{const} < \infty$; $\varepsilon \in (0, 1)$ - фиксированное число.

Обозначим соответственно через $n(r, a)$ и $n(r, b)$ количества a -точек и b -точек функции $w(z)$ в круге $|z| < r$, а через $n(r, a, b)$ - количество тех

a -точек $z_k(a) \in \bar{E}_k(r) \subset \bigcup_{i=1}^{\Phi(r)} \bar{E}_i(r)$, для каждой из которых найдется b -точка $z_k(b)$ из области $\bar{E}_k(r) \subset \{|z| < r\}$, $k = 1, 2, \dots$, $\bar{\Phi}(r)(\bar{E}_k(r))$ и $\bar{\Phi}(r)$ определены в [18].

В работе [19] доказана следующая лемма:

Лемма 2.3. Пусть $w(z)$ \mathbb{C} - мероморфная в \mathbb{C} функция; $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}, \nu = 1, 2, \dots, n$ такие, что $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Если $1 < c = \text{const} < \infty$, то

$$\sum_{\nu=1}^n [n(r, a_\nu) + n(r, b_\nu) - 2n(r, a_\nu, b_\nu)] \leq K_0 \frac{c}{c-1} T(cr), \quad (2.12)$$

$r \notin E, r > r^*$, где $\int_E d \ln t < \infty, K_0$ - абсолютная постоянная.

Лемма 2.4. Пусть $w(z) \in \mathbb{C}$ - мероморфная в \mathbb{C} функция; $a, b \in \mathbb{C}$ такие, что $|a-b| > 2$. Тогда при $R > R_0$ выполняется следующее неравенство ($R' = a_3 \cdot R$):

$$\begin{aligned} \int_{E_a(R)} \frac{P_k^{**}(r, a) dr}{|\Delta_\rho^*(r, a)|^{2-\varepsilon}} &\leq K_1 \{m(R', a) + m(R', b)\} R + \\ &+ K_2 \{n(R', a) + n(R', b) - 2n(R', a, b)\} \cdot R + o[T(R)] \cdot R, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $|\Delta_\rho(r, a)|$ - угловая мера множества $\Delta_\rho(r, a)$.

Доказательство. Индексом i будем отмечать те a -точки $z_i(a)$ и b -точки $z_i(b)$, которые фигурируют в определении $n(R', a, b)$; остальные a -точки (b -точки) из круга $|z| < R'$ будем отмечать индексом $l(j) - z_l(a)(z_j(b))$.

Используя формулу Неванлинны и неравенство (2.3), получим ($z = re^{i\varphi}$)

$$\begin{aligned} P_k^*(r, a) &\leq K \cdot r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{w(R'e^{i\theta} - a)}{w(R'e^{i\theta} - b)} \right| \left| \frac{R'd\theta}{R'e^{i\theta} - z} \right|^{k+1} \right]^{\frac{1}{k}} d\varphi + \\ &+ K \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left| \frac{1}{(z_i(b) - z)^k} - \frac{1}{(z_i(a) - z)^k} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi + \\ &+ K \sum_{i=1}^{n(R', b) - n(R', a, b)} r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|z - z_j(b)|} + K \sum_{l=1}^{n(R', a) - n(R', a, b)} r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|z - z_l(a)|} + \\ &+ K \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \left| \frac{[\bar{z}_i(a)]^k}{[(R')^2 - \bar{z}_i(a)z]^k} - \frac{[\bar{z}_i(b)]^k}{[(R')^2 - \bar{z}_i(b)z]^k} \right|^{\frac{1}{k}} d\varphi + \\ &+ K \sum_{i=1}^{n(R', b) - n(R', a, b)} r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{|\bar{z}_i(a)| d\varphi}{|(R')^2 - \bar{z}_i(a)z|} + K \sum_{j=1}^{n(R', b) - n(R', a, b)} r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{|\bar{z}_j(b)| d\varphi}{|(R')^2 - \bar{z}_j(b)z|} + \\ &+ \int_{\Delta_\rho(r, a)} |\ln^{(k)}(w(z) - b)|^{\frac{1}{k}} d\varphi = J_1^{(k)}(r) + \dots + J_7^{(k)}(r) + J_k(r, a, b). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Используя неравенство Гельдера, нетрудно видеть, что

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{J_1^{(k)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K_1 \{m(R', a) + m(R', b) + O(1)\} R. \quad (2.15)$$

Обозначим $\rho_i = \rho_i(R') = |z_i(a) - z_i(b)|, i = 1, 2, \dots, n(R', a, b)$.

Используя неравенство (2.3), получим

$$J_2^{(k)} \leq K_2 \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left\{ \sum_{l=1}^k r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{1}{k}} |z - z_i(b)|^{\frac{k-l+1}{k}}} \right\}. \quad (2.16)$$

Применяя неравенство Гельдера, имеем

$$J_{i,\varepsilon}^{2,k} \stackrel{def}{=} \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{l}{k}} |z - z_i(b)|^{\frac{k-l+1}{k}}} \leq \left[\int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|z - z_i(a)|^{\frac{l(2-\varepsilon)}{k}} |z - z_i(b)|^{\frac{(k-l+1)(2-\varepsilon)}{k}}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} |\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Отсюда и из (2.16), используя метод доказательства неравенства (2.13) работы [17], получим

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{J_2(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K_2 \left\{ A^{\frac{1}{8}}(R') L(R') + O[A(R')] \right\} R \ln R,$$

где $A(R)$ и $L(r)$ - сферические характеристики Л. Альфорса.

Положим теперь $\alpha_1 = 1/(\lambda + 2), \alpha_2 = 1/(\lambda + 1)$.

Из оценки $L(r) < [A(r)]^{2/3}, r \notin E, \int_E d \ln t < \infty$ (см. [1], п. 326) вытекает, что при $R > R_1^*$ в каждом интервале $((1 + \alpha_2)P/2, (3 + \alpha_2)P/4)$ найдется такая точка $R' = \alpha_3(R)R = \alpha_3 R$, для которой $L(R') = L(\alpha_3 R) \leq [A(\alpha_3 R)]^{2/3}$. Отсюда, учитывая очевидное неравенство $A(r) < T(\beta r)/\ln \beta (\beta > 1)$, имеем $L(R') \leq [(-\ln \alpha_3)^{-1} T(R)]^{2/3}$. Следовательно,

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{J_2^{(k)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = [T(R)] \cdot R. \quad (2.17)$$

Используя неравенство Гельдера и исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что

$$\int_{E_a(R)} \frac{J_3^{(k)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K_3 \{n(R', b) - n(R', a, b)\} R, \quad (2.18)$$

$$\int_{E_a(R)} \frac{J_4^{(k)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K_4 \{n(R', a) - n(R', a, b)\} R. \quad (2.19)$$

Учитывая, что $z_i(a)$ и $z_i(b) \in D_0(R')$ и неравенство (2.3), нетрудно видеть, что

$$J_5^{(k)}(r) \leq K_5 R_k^{k+1} \sum_{i=1}^{n(R', a, b)} \rho_i^{\frac{1}{k}} \left\{ \sum_{l=1}^k r \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|(R')^2 - \bar{z}_i(a)|^{\frac{l}{k}} |(R')^2 - \bar{z}_i(b)|^{\frac{k-l+1}{k}}} \right\}. \quad (2.20)$$

По неравенству Гельдера получим

$$J_{i,e}^{5,k} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|(R')^2 - \bar{z}_i(a)|^{\frac{l}{k}} |(R')^2 - \bar{z}_i(b)|^{\frac{k-l+1}{k}}} \leq \left[\int_{\Delta_\rho(r, a)} \frac{d\varphi}{|(R')^2 - \bar{z}_i(a)|^{\frac{l(2-\varepsilon)}{k}} |(R')^2 - \bar{z}_i(b)|^{\frac{k-l+1}{k}}} \right]^{\frac{1}{2-\varepsilon}} |\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Отсюда и из (2.20), используя метод доказательства неравенства (2.16) работы [17], получим

$$\int_{E_a(R)} \frac{J_5^{(k)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K_5 \left\{ A^{\frac{1}{8}}(R') L(R') + O[A(R')] \right\} R$$

Отсюда, как и при доказательстве неравенства, получим

$$\int_{E_a(R)} \frac{J_5^{(k)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = O[T(R)] \cdot R. \quad (2.21)$$

Используя неравенство Гельдера и исходя из геометрических соображений, нетрудно получить, что

$$\int_{E_a(R)} \frac{J_\kappa^{(6)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K_6 \{n(R', a) - n(R', a, b)\} R, \quad (2.22)$$

$$\int_{E_\alpha(R)} \frac{J_\kappa^{(7)}(r) dr}{|\Delta_\rho(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leq K_7 \{n(R', b) - (R', a, b)\} R. \quad (2.23)$$

Окончательно, используя лемму 2.1 и неравенства (2.14), (2.15), (2.17)-(2.19), (2.21)-(2.23), имеем

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha} \frac{P_k^*(r, a) dr}{|\Delta_\rho^*(r, a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} &\leq K_1 \{m(R', a) + m(R', b)\} \cdot R + \\ &+ K_2 \{n(R', a) + n(R', b) - 2n(R', a, b)\} \cdot R + o[T(R)] \cdot R. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $a_v, b_v \in \mathbb{C}, |a_v - b_v| > 2, v = 1, 2, \dots, n$. Записывая для каждой пары $\{a_v, b_v\}$ неравенство (2.15) леммы 2.4 и суммируя, получим

$$\begin{aligned} \int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{P_k^*(r, a_v)}{|\Delta_\rho(r, a_v)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \right\} dr &\leq K_1 R \sum_{v=1}^n \{m(R', a_v) + m(R', b_v)\} + \\ &+ K_2 R \sum_{v=1}^n \{n(R', a_v) + n(R', b_v) - 2n(R', a_v, b_v)\} + o[T(R)] R, \quad R > R_0^*. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Отсюда, используя вторую основную теорему Р. Неванлинны и лемму 2.3 при $c = (\lambda + 2)/(\lambda + 1)$, получим

$$\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{P_k^*(r, a_v)}{|\Delta_\rho(r, a_v)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \right\} dr \leq K(k, \lambda) T(CR) \cdot R, \quad R > R_2^*.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть теперь $p = (3 - 2\varepsilon)/(2 - \varepsilon)$, $q = (3 - 2\varepsilon)/(1 - \varepsilon)$ и $l = (1 - \varepsilon)/(2 - \varepsilon)$. Ясно, что $l \cdot q / p = 1$. Возьмем $\rho = \min \left\{ \min_{i \neq j} \frac{a_i - a_j}{2}, 1 \right\}$, тогда ясно, что $\Delta_\rho(r, a_i) \cap \Delta_\rho(r, a_j) = \Phi$ при $i \neq j$, следовательно, $\sum_{v=1}^n |\Delta_\rho(r, a_v)| \leq 2\pi$. Поскольку $P_k(r, a) = P_k^*(r, a) + P_k^{**}(r, a)$, то, используя неравенство (2.3) и неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{v=1}^n P_k^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \leq 2\pi \left(\sum_{v=1}^n \frac{P_k^*(r, a_v)}{|\Delta_\rho(r, a_v)|^l} \right)^{\frac{1}{p}} + 2\pi \left(\sum_{v=1}^n \frac{P_k^{**}(r, a_v)}{|\Delta_\rho^*(r, a_v)|^l} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда, снова применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{v=1}^n P_k^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \right\} dr \leq K_1 \left(\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{P_k^*(r, a_v)}{|\Delta_\rho(r, a_v)|^l} \right\} dr \right)^{\frac{1}{p}} \cdot R^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ K_2 \left(\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{P_k^{**}(r, a_v)}{|\Delta_\rho^*(r, a_v)|^l} \right\} dr \right)^{\frac{1}{p}} \cdot R^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно, используя лемму 2.2 и теорему 1.1, получим ($c_1 = \max\{c, \beta\}$)

$$\int_{E_\alpha(R)} \left\{ \sum_{v=1}^n P_k^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \right\} dr \leq K(k, \lambda) T^{\frac{1}{p}}(c_1 R) \cdot R, \quad R > R_0^*. \quad (3.2)$$

Применяя теорему о среднем значении, в некоторой точке $R^* \in E_\alpha(R)$ имеем

$$\sum_{v=1}^n P_k^{\frac{1}{p}}(R^*, a_v) \leq K(k, \lambda) T^{\frac{1}{p}}(c_1 R). \quad (3.3)$$

Выберем множество $R_n = R_n(a_1, c_1)$ значений R , зависящих только от a_1 и c_1 , для которых выполняется неравенство

$$T(c_1 R_n) = T\left(\frac{c_1}{a_1} a_1 R_n\right) \leq \left(\frac{c_1}{a_1}\right)^{\lambda+1} T(a_1 R_n). \quad (3.4)$$

Возможность такого выбора обеспечивается леммой 1.3.1 из работы [2]. Ясно, что для R_n существуют множества $R_n^* = R_n^*(a_1, c_1)$ значений R^* таких, что выполняется неравенство (3.2).

Из неравенств (3.3) и (3.4) получим

$$\sum_{v=1}^n P_k^{\frac{1}{p}}(R_n^*, a_v) \leq K(k, \lambda) T^{\frac{1}{p}}(R_n^*). \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{v=1}^n D_k^{\frac{1}{p}}(a_v) \leq K(k, \lambda).$$

Теорема 1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Нетрудно видеть, что

$$Q_2(r, a) \leq P_1(r, a) + P_2(r, a).$$

Используя неравенства (2.3) и (3.2), получим

$$\int_{E_a(R)} \left\{ \sum_{v=1}^n Q_2^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \right\} dr \leq K(\lambda) T^{\frac{1}{p}}(c_1, R) \cdot R, \quad R > R_0^*.$$

Отсюда, как и при доказательстве соотношения (3.5), получим

$$\sum_{v=1}^n Q_2^{\frac{1}{p}}(R, a_v) \leq K(\lambda) T^{\frac{1}{p}}(R), \quad R = R_n^* \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty,$$

следовательно,

$$\sum_{v=1}^n B_2^{\frac{1}{p}}(a_v) \leq K(\lambda).$$

Теорема 1.3 доказана.

Доказательство следствия 1.1. Ясно, что соотношение (1.7) достаточно доказать в случае, когда $|a_i - a_j| > 2, 1 \leq i < j \leq n$. Отсюда следует, что

$$\Delta(r, a_i) \cap \Delta(r, a_j) = \Phi, i \neq j \quad \sum_{v=1}^n |\Delta(r, a_v)| \leq 2\pi.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{m(r, a)}{|\Delta(r, a_v)|} \leq P_1(r, a) + O(1), r \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Положим $p = (5 - 3\varepsilon)/(2 - \varepsilon)$, $q = (5 - 2\varepsilon)/(3 - 2\varepsilon)$ и $\gamma = (3 - 2\varepsilon)/(2 - \varepsilon)$.

Ясно, что $q\gamma/p = 1$.

Теперь по неравенству Гельдера получим

$$\sum_{v=1}^n m^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \leq (2\pi)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{v=1}^n \frac{m(r, a_v)}{|\Delta(r, a_v)|^\gamma} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда и из неравенства (3.6) имеем ($\gamma-1=l$)

$$\sum_{v=1}^n m^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \leq K \left(\sum_{v=1}^n \frac{P_1(r, a_v)}{|\Delta(r, a_v)|^l} \right)^{\frac{1}{p}} + O(1). \quad (3.7)$$

Поскольку $P_1(r, a_v) = P_1^*(r, a_v) + P_1^{**}(r, a_v)$ и $|\Delta(r, a_v)| \geq |\Delta_\rho(r, a_v)|$, $|\Delta(r, a_v)| \geq |\Delta_\rho^*(r, a_v)|$, то получим

$$\left\{ \sum_{v=1}^n \frac{P_1(r, a_v)}{|\Delta(r, b_v)|^\gamma} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{P_1^*(r, a_v)}{|\Delta(r, b_v)|^l} \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{P_1^{**}(r, a_v)}{|\Delta(r, b_v)|^l} \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера и используя лемму 2.2 и теорему 1.1, из соотношения (3.7) имеем

$$\int_{E_\alpha(p)} \left\{ \sum_{v=1}^n m^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \right\} dz \leq K(\lambda) T^{\frac{1}{p}}(c_1 R) R, \quad R > R_0^*.$$

Как и при выводе неравенства (3.7), получим

$$\sum_{v=1}^n m^{\frac{1}{p}}(r, a_v) \leq K(\lambda) T^{\frac{1}{p}}(R), \quad R = R_n^* \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty,$$

следовательно,

$$\sum_{v=1}^n \delta^{\frac{1}{p}}(a_v) \leq K(\lambda).$$

Следствие 1.1 доказано.

Доказательство следствия 1.2 очевидно, так как $\beta(a) \leq D_1(a)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Неванлинна Р.** Однозначные аналитические функции.-М.: ОГИЗ, 1941.- 389с.
2. **Петренко В.** Рост мероморфных функций. - Харьков: Высш. школа,- 1978.-136с.
3. **Говоров Н.В.** О проблеме Пейли// Функц. анализ и его приложения.- 1969.-3, вып. 2.- С.38-43.
4. **Гольдберг А.А.** К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции// Теория функций, функциональный анализ и их приложения.- Харьков, 1978.- Вып. 29. – С. 31-35.
5. **Гольдберг А.А., Островский И.В.** Некоторые теоремы о росте мероморфных функций// Зап. мат. отд. Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва. Серия 4. -1961.- 27. – С. 3-37.

6. **Еременко А.Э.** Об отклонениях мероморфных функций конечного нижнего порядка// Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1983.- Вып. 40. – С. 50-64.
7. **Барсегян Г.А.** О геометрии мероморфных функций: Докторская диссертация. – Тбилиси, 1984. – 210с.
8. **Барсегян Г.А.** Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций// Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1981.- 16, №5. – С. 405-423.
9. **Барсегян Г.А., Петросян В.Г.** Исключительные значения, определяемые посредством высших производных мероморфных функций// Изв. АН АрмССР. Сер. матем. – 1993. - 28, №3.
10. **Fuchs W.H.J.** A theorem on the Nevanlinna deficiencies of meromorphic functions of finite order// Ann. Math. – 1958.- 68, №2. – P. 203-209.
11. **Fuchs W.H.J.** Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series// III J. Math. – 1963.- 7, №4. – P. 661-667.
12. **Muess E.** Uber eine Vermutung von Hayman// Math. Z.-1971.- 119, №1.- P. 11-20.
13. **Хейман В.К.** Мероморфные функции. - М.: Мир, 1966.-288с.
14. **Барсегян Г.А., Петросян В.Г.** Соотношения типа тождества Картана для величин, ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций// Изв. АН АрмССР. Сер. матем.- 1990.- 25, №5. – С. 474-488.
15. **Петросян В.Г.** Соотношения типа тождества Картана// ДАН АрмССР. -1992.- 93, №5. – С. 200-205.
16. **Петросян В.Г.** Некоторые оценки мер исключительности исключительных значений мероморфных функций конечного нижнего порядка// Арм. НИИНТИ, №73, АР-89, деп. - 20с.
17. **Петросян В.Г.** Оценки мер исключительности исключительных значений ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций// Изв. НАН Армении. Сер. матем. – 1987.- 48, №1. – С. 42-67.
18. **Барсегян Г.А.** Свойство близости a -точек мероморфных функций// Матем. сб. – 1987.- 120 (162), №1. – С. 42-67.
19. **Петросян В.Г.** Исключительные значения мероморфных функций, определяемые посредством их производных: Кандидатская диссертация.- Ереван. - 1990. – 180с.

Վ.Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՆԵՎԱՆԼԻՆԱՅԻ ՏԻՊԻ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՆՈՐ «ԲԱՑԱՌԻԿ» ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ստացված են Ռ. Նևանլինայի արատների հարաբերակցության տիպի թեորեմներ նոր «բացառիկ» արժեքների համար:

Առանցքային բառեր. Նևանլինայի տեսություն, Ալֆորսի տեսություն, a -կետերի մոտիկության հատկություն:

V.G. PETROSYAN

NEVANLINNA-TYPE THEOREMS FOR NEW “EXCLUSIVE” VALUES

Some R. Nevanlinna defect-relation-type theorems are obtained for new “exclusive” values.

Keywords: the R. Nevanlinna theory, the L. Alfors theory, a-points closeness property.

UDC 621.391.15

I.A. KARAPETYAN, K.I. KARAPETYAN

THE COMPLETE CAPS IN PROJECTIVE GEOMETRY $PG(n, 3)$

We consider the problem of finding the sizes of the largest and the least caps in projective geometry $PG(n, 3)$ over the field $F_3 = \{0, 1, 2\}$. A cap is a set of points, no three of which are collinear. We give two new recurrence constructions for complete caps in projective geometry $PG(n, 3)$. Notice that the constructed caps for some n 's have maximal passible sizes.

Keywords: affine space, projective space, points, caps, complete caps.

In this paper, we consider a variant of the packing problem for the n -dimensional projective geometry $PG(n, q)$ over a finite field F_q with q elements. The packing problem is to find the maximum cardinality of a set points with property that no k points from this set are linearly dependent. When $k = 3$ such sets are called caps. A cap is called complete when it cannot be extended to a larger one. The main problem in the theory of caps is to find the minimal and maximal sizes of complete caps in projective geometry $PG(n, q)$ and/or in affine geometry $AG(n, 3)$. Finding the exact value for minimal and maximal cardinality of caps in projective geometry $PG(n, q)$ or in affine geometry $AG(n, 3)$, in the general case, seems to be a very hard problem. There are some well-known constructions (doubling, product and recursive) which allow to create large high-dimensional caps based on large low-dimensional caps. Note that the problem of determining the minimum size of a complete cap in a given space is of particular interest in the Coding theory. If we write the points of the cap as columns of a matrix, we obtain a matrix in which every three columns are linearly independent, hence the generator matrix of a linear orthogonal array of strength three. This matrix is a check matrix of a linear code with minimum distance greater than three. Let denote the size of the largest caps in $AG(n, q)$ and $PG(n, q)$ by $s_{n,q}$ and by $s'_{n,q}$, respectively. Presently, only the following exact values are known: $s_{n,2} = s'_{n,2} = 2^n$, $s_{2,q} = s'_{2,q} = q + 1$ if q is odd, $s_{2,q} = s'_{2,q} = q + 2$ if q is even, and $s'_{3,q} = q^2 + 1$, $s_{3,q} = q^2$ [1,2]. Apart