

И.А. КАРАПЕТЯН, К.И. КАРАПЕТЯН

О ПОЛНЫХ ШАПКАХ В ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ $PG(n, 3)$

Рассматривается задача нахождения размеров наибольшей и наименьшей шапок в проективной геометрии $PG(n, 3)$ на поле $F_3 = \{0, 1, 2\}$. Шапка - это набор точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Разработаны две новые рекуррентные конструкции построения полных шапок. Заметим, что построенные шапки для некоторых n имеют наибольшую возможную мощность.

Ключевые слова: аффинная геометрия, проективная геометрия, точки, шапки, полные шапки.

УДК 515.172.22

Р.В. ДАЛЛАКЯН

О ЗАДАЧЕ ВЛОЖЕНИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССАХ D_{p-1}^p (Ванадзор)

Сначала доказывается, что любая функция из функционального класса D_{p-1}^p ($0 < p < \infty$), представимая лакунарным рядом, принадлежит малому классу Блоха $B_0 \subset B$. Для функций же из $D_{p-1}^p \cap B$ задача о вложении решена. Далее приводится основной результат: теорема о вложении функциональных классов D_{p-1}^p .

Ключевые слова: лакунарные ряды, пространство со смешанной нормой, пространства Харди, Джрбашяна-Бергмана, Блоха.

Введение. Пусть D - единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $H(D)$ - множество голоморфных в D функций. Далее, пусть для $z = re^{i\varphi} \in D$

$$M_p(r, f) = \begin{cases} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < +\infty, \\ \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} |f(re^{i\varphi})|, & p = +\infty. \end{cases}$$

Семейство голоморфных функций из $H(D)$, для которых

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) < +\infty,$$

называется классом H^p Харди. Пространство со смешанной нормой $H(p, q, \alpha)$ ($0 < p, q < +\infty$, $\alpha > 0$) - это множество тех функций из $H(D)$, для которых конечна квазинорма:

$$\|f\|_{p, q, \alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(r, f) dr \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < +\infty, \\ \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f), & q = +\infty. \end{cases}.$$

Функциональный класс A_α^p ($0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$) Джрбашяна-Бергмана определяется как множество тех функций f из $H(D)$, для которых

$$\|f\|_{A_\alpha^p} = \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-r)^\alpha |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Класс тех функций, для которых $f' \in A_\alpha^p$, обозначается через D_α^p .

Последовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ называется лакунарной (по Адамару), если существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что $\frac{m_{k+1}}{m_k} \geq \lambda$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k z^{m_k}$ называется лакунарным.

Следующая теорема К.Л. Аветисяна характеризует лакунарные ряды в пространствах со смешанной нормой.

Теорема ([1], теорема 1). Пусть $0 < q < +\infty$, $\alpha > 0$; $\{m_k\}_{k=0}^\infty$ - произвольная лакунарная последовательность и $f(z)$ - голоморфная в D

функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда

следующие утверждения равносильны:

а) $f \in H(\infty, q, \alpha)$; б) $f \in H(p, q, \alpha)$ для некоторого $p \in (0, \infty)$;

в) $f \in H(p, q, \alpha)$ для всех $p \in (0, \infty)$; г) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{q\alpha}} < +\infty$.

Более того, соответствующие нормы эквивалентны:

$$\|f\|_{\infty, q, \alpha} \approx \|f\|_{p, q, \alpha} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^q}{m_k^{q\alpha}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Функция f из $H(D)$ принадлежит классу B -Блоха, если

$$\|f\|_B = |f(0)| + \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| < +\infty.$$

f из $H(D)$ принадлежит малому классу B_0 -Блоха, если

$$\lim_{|z| \rightarrow 1} (1 - |z|^2) |f'(z)| = 0.$$

В работе [2] (стр. 54, лемма 2,5) С.А. Виноградов доказал, что

$$D_{p-1}^p \cap B \subset D_{q-1}^q \cap B, \quad 0 < p < q < +\infty.$$

Основные результаты. Замечая, что $H(p, p, 1) = A_{p-1}^p$, из вышеупомянутой теоремы К.Л. Аветисяна, как следствие, получается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $0 < p < +\infty$, $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ - произвольная лакунарная последовательность и $f(z)$ - голоморфная в D функция, заданная сходящимся лакунарным рядом $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k}$. Тогда следующие утверждения равносильны:

$$\text{а) } f' \in H(\infty, p, 1) ; \text{б) } f \in D_{p-1}^p ; \text{в) } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p < +\infty .$$

Более того,

$$\|f\|_{\infty, p, 1} \approx \|f\|_{D_{p-1}^p} \approx \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Замечание. Из пункта «а» этой теоремы следует, что если f удовлетворяет условиям теоремы и $f \in D_{p-1}^p$, то

$$\int_0^1 (1-r)^{p-1} \left(\sup_{0 \leq \varphi < 2\pi} |f'(re^{i\varphi})| \right)^p dr < +\infty,$$

откуда для $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{m_k} \in D_{p-1}^p$ при $|z| \rightarrow 1$ будем иметь

$$|f'(z)| \leq C(1-|z|)^{-1} \prod_{k=1}^n \left(\underbrace{\log \log \dots \log}_{\underset{k}{}} (1-|z|)^{-1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

для любого натурального числа n .

Таким образом, $f(z) \in B_0 \subset B$. Значит, по лемме С.А. Виноградова для любой функции, заданной сходящимся лакунарным рядом, справедливо следующее утверждение: если $f \in D_{p-1}^p$, то $f \in D_{q-1}^q$, $0 < p < q < +\infty$.

Далее доказывается следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть $0 < p < q < +\infty$. Тогда:

$$1) \text{ если } f \in D_{p-1}^p \text{ и } M_p^p(r, f') \log(1-r) + \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^p \log |f'(re^{i\varphi})| d\varphi \leq 0,$$

то $f \in D_{q-1}^q$;

$$2) \text{ если } f \in D_{q-1}^q \text{ и } M_p^p(r, f') \log(1-r) + \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\varphi})|^p \log |f'(re^{i\varphi})| d\varphi > 0,$$

то $f \in D_{p-1}^p$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аветисян К.Л.** Лакунарные ряды в пространствах со смешанной нормой в круге //Изв. НАН Армении. Математика.- 2010.- Том 45, № 5.- С. 9-18.
2. **Виноградов С.А.** Умножение и деление в пространстве аналитических функций с производной, суммируемой по площади, и близких к нему пространствах //Зап. Научн. сем. ПОМИ.- 1995.- Том 222.- С. 45-77.

Ռ.Վ. ԴԱԼԼԱԿՅԱՆ

D_{p-1}^p ՖՈՒՆԿՏԻՈՆԱԼ ԴԱՍԵՐՈՒՄ ՆԵՐԴՐՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՒ ՄԱՍԻՆ

Ցույց է տրվում, որ D_{p-1}^p ($0 < p < \infty$) դասի ցանկացած ֆունկցիա, որը ներկայացվում է լակունար շարքով, պատկանում է Բլոխի փոքր $B_0 \subset B$ դասին: Բայց $D_{p-1}^p \cap B$ դասերի ֆունկցիաների համար ներդրվածության խնդիրը լուծված է: Բերվում է հիմնական արդյունքը՝ թեորեմ D_{p-1}^p ֆունկցիոնալ դասերի ներդրվածության մասին:

Առանցքային բառեր. լակունար շարքեր, խառը նորմով տարածություններ, Հարդիի, Զրբաշյան-Բերգմանի, Բլոխի դասեր:

R.V. DALLAKYAN

THE PROBLEM OF EMBEDDING IN FUNCTIONAL D_{p-1}^p CLASSES

First of all, it is proved that each function from the D_{p-1}^p ($0 < p < \infty$) class which is presented by lacunar series belongs to Bloch's small class $B_0 \subset B$. For the function of the $D_{p-1}^p \cap B$ class, the problem of embedding is solved.

Further, the main result is given: the theorem of embedding the functional classes D_{p-1}^p .

Keywords: lacunar series, space with a mixed norm, Hardy, Jrbashyan, Bergman, Bloch spaces.