УДК 514.752 .44

В.А. МИРЗОЯН

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА С ЕДИНИЧНЫМ ИНДЕКСОМ РЕГУЛЯРНОСТИ

Дано геометрическое описание нормально плоских полупараллельных подмногообразий с одним регулярным главным вектором кривизны, имеющим кратность, и одним ненулевым сингулярным главным вектором кривизны в евклидовых пространствах. Получены два критерия интегрируемости распределения кодефектности нормально плоских подмногообразий.

Ключевые слова: эйнштейновы, полуэйнштейновы и полупараллельные подмногообразия, полусимметрические и риччи-полусимметрические подмногообразия.

Римановы полусимметрические многообразия были исследованы в [1], а риччи-полусимметрические – в [2]. Частные классы таких подмногообразий были изучены в [3]-[5] и др. Задача исследования таких подмногообразий остаётся актуальной. В настоящей работе даётся геометрическое описание одного класса полупараллельных подмногообразий в евклидовых пространствах.

Пусть в евклидовом пространстве E_{m+2} тензор Риччи m-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия M коразмерности два имеет только одно ненулевое собственное значение. Тогда M допускает или только одну группу главных векторов кривизны (г.в.к.) $W^{(1)}$, или только две группы г.в.к. $W^{(0)}$ и $W^{(1)}$, которые соответствуют нулевому и ненулевому собственным значениям тензора Риччи (подробности см. в [5]). В первом случае подмногообразие M является эйнштейновым (но не риччи-плоским), а во втором случае – полуэйнштейновым. Так как $n-m=2$, то неравенство (4.7) в [5] принимает вид $0 \le \mu-\nu+i_R \le 2$, где μ – индекс дефектности, ν – индекс относительной дефектности, а i_R – индекс регулярности. Следовательно необходимо рассмотреть всего три случая: (a) $i_R=1,\ \mu=\nu$, (b) $i_R=1,\ \mu=\nu+1$, (c) $i_R=2,\ \mu=\nu$. В случаях (a) и (b) условие $i_R=1$ означает, что размерность линейной оболочки множества всех регулярных г.в.к. равна 1, т.е. все регулярные г.в.к. коллинеарны. Поскольку тензор Риччи имеет ненулевое собственное значение, то этому собственному значению соответствует некоторый регулярный г.в.к. Следовательно, все остальные регулярные г.в.к. коллинеарны этому вектору, и все они принадлежат группе $W^{(1)}$. Тогда группа $W^{(1)}$ состоит или из одного регулярного г.в.к., имеющего кратность, или из двух неравных коллинеарных регулярных г.в.к. Здесь мы рассмотрим случай (b) в предположении, что группа $W^{(1)}$ состоит только из одного г.в.к. n_1, имеющего кратность $p \geq 2$. Условие $\mu = \nu + 1$ означает, что группа $W^{(0)}$ содержит только один ненулевой сингулярный г.в.к. n_2 и, возможно, нулевой. Кратность n_2 равна единице и $n_2 \perp n_1$ (см. [6]). Пусть $T_x^{(n_1)}$ и $T_x^{(n_2)}$ обозначают собственные подпространства, сответствующие векторам n_1 и n_2 соответственно. Тогда в каждой точке $x \in M$ фактически $T_x^{(0)} = T_x^{(n_2)} \oplus T'_x$, где $T_x^{(0)}$ − пространство дефектности, T'_x − пространство относительной дефектности, а пространство кодефектности $T_x^{(1)}$ совпадает с $T_x^{(n_1)}$. Пространство T'_x соответствует нулевому г.в.к. Легко показать, что M имеет ***полупараллельную вторую фундаментальную форму.*** Поскольку по построению $\dim T_x^{(n_1)} = p$, $\dim T_x^{(n_2)} = 1$, то $\nu = \dim T'_x = m - p - 1$. Для геометрического описания подмногообразия M ортонормированный репер $\{x, e_1, ..., e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\}$ в E_{m+2} адаптируем следующим образом: $e_1, ..., e_p \in T_x^{(n_1)}$, $e_{p+1} \in T_x^{(n_2)}$, $e_{p+2}, ..., e_m \in T'_x$, $e_{m+1}, e_{m+2} \in T_x^{\perp}(M)$. Индексы будут принимать следующие значения: $i, j, k = 1, ..., m$, $a, b, c = 1, ..., p$, $u, v, w = p+2, ..., m$, $\alpha, \beta = m+1, m+2$. Поскольку нормальная связность плоская, то в некотором ортонормированном репере все матрицы $\|h_{ij}^{\alpha}\|$ второй фундаментальной формы α_2 могут быть одновременно приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^{\alpha} \delta_{ij}\|$. Тогда $n_1 = \lambda_a^{\alpha} e_{\alpha}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{\alpha} e_{\alpha}$, причем $\lambda_a^{\alpha} = \lambda_b^{\alpha}$, $a \neq b$, в силу кратности вектора n_1. Так как $n_1 \perp n_2$, то векторы e_{m+1}, e_{m+2} можем выбрать сонаправленно с векторами n_1 и n_2 соответственно. При таком выборе имеем $n_1 = \lambda_a^{m+1} e_{m+1}$, $n_2 = \lambda_{p+1}^{m+2} e_{m+2}$, где $\lambda_a^{m+1} > 0$, $\lambda_{p+1}^{m+2} > 0$. Тогда $h_{ab}^{m+1} = \lambda_a^{m+1} \delta_{ab}$ и $h_{ij}^{m+1} = 0$ в остальных случаях,

$h^{m+2}_{(p+1)(p+1)} = \lambda^{m+2}_{p+1}$ и $h^{m+2}_{ij} = 0$ в остальных случаях. Легко проверить, что такой вид матриц второй фундаментальной формы m-мерного подмногообразия M в E_{m+2} в некотором ортонормрепере с такими же условиями на диагональные элементы является достаточным, чтобы M было нормально плоским подмногообразием с одним регулярным г.в.к. кратности $p \geq 2$, одним ненулевым сингулярным г.в.к., нулевым г.в.к. и собственными значениями тензора Риччи $\rho_u = 0$, $\rho_{p+1} = 0$, $\rho_a = (1-p)(\lambda^{m+1}_a)^2 < 0$.

Пусть $\left\{\omega^1, ..., \omega^{m+2}\right\}$ – корепер в E_{m+2}, двойственный к выбранному выше адаптированному реперу $\left\{x, e_1, ..., e_m, e_{m+1}, e_{m+2}\right\}$. Тогда на M имеем

$$\omega^\alpha = 0,\ \omega^\alpha_i = \lambda^\alpha_i \delta_{ij} \omega^j,\ d\lambda^\alpha_i \delta_{ij} + \lambda^\beta_i \delta_{ij} \omega^\alpha_\beta + \left(\lambda^\alpha_j - \lambda^\alpha_i\right)\omega^i_j = h^\alpha_{ijk}\omega^k, \qquad (1)$$

где h^α_{ijk} симметричны по нижним индексам. Если в третьем уравнении системы (1) индексам придавать различные значения, то в итоге получим (что нелегко сделать) следующие соотношения:

$$h^\alpha_{aaa} = 0,\ h^\alpha_{abk} = 0,\ h^\alpha_{uvk} = 0,\ h^{m+2}_{aau} = 0,\ h^\alpha_{aa(p+1)} = h^\alpha_{bb(p+1)},$$

$$h^\alpha_{aau} = h^\alpha_{bbu},\ a \neq b,\ h^\alpha_{a(p+1)u} = 0, h^\alpha_{a(p+1)(p+1)} = 0,\ h^{m+1}_{(p+1)(p+1)u} = 0,$$

$$d\lambda^{m+1}_a = h^{m+1}_{aa(p+1)}\omega^{p+1} + h^{m+1}_{aau}\omega^u,\ d\lambda^{m+2}_{p+1} = h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1} + h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^u,$$

$$\lambda^{m+1}_a \omega^{m+2}_{m+1} = h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^{p+1},\ \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{m+2}_{m+1} = -h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}\omega^{p+1},\ \lambda^{m+1}_a \omega^{p+1}_a = h^{m+1}_{aa(p+1)}\omega^a,$$

$$\lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{p+1}_a = -h^{m+2}_{aa(p+1)}\omega^a,\ \lambda^{m+1}_a \omega^u_a = h^{m+1}_{aau}\omega^a,\ \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^u_{p+1} = h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}\omega^{p+1}.$$

Преобразуя полученную дифференциальную систему, будем иметь

$$\begin{gathered} d\ln\lambda^{m+1}_a = A_{p+1}\omega^{p+1} + A_u\omega^u,\ d\ln\lambda^{m+2}_{p+1} = D_{p+1}\omega^{p+1} + D_u\omega^u, \\ \omega^{p+1}_a = A_{p+1}\omega^a,\ \omega^u_a = A_u\omega^a,\ \omega^u_{p+1} = D_u\omega^{p+1},\ \omega^{m+2}_{m+1} = B\omega^{p+1}, \end{gathered} \qquad (2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_{p+1} = \frac{h^{m+1}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_a} = -\frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},\ B = \frac{h^{m+2}_{aa(p+1)}}{\lambda^{m+1}_a} = -\frac{h^{m+1}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},$$

$$A_u = \frac{h^{m+1}_{aau}}{\lambda^{m+1}_a},\ D_{p+1} = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)(p+1)}}{\lambda^{m+2}_{p+1}},\ D_u = \frac{h^{m+2}_{(p+1)(p+1)u}}{\lambda^{m+2}_{p+1}}.$$

В выбранном репере $\omega_{p+1}^{m+1}=\omega_{u}^{m+1}=\omega_{a}^{m+2}=\omega_{u}^{m+2}=0$. Дифференцируя эти равенства внешним образом, получим одно следствие: $\lambda_{p+1}^{m+2}A_{p+1}+B\lambda_{a}^{m+1}=0$.

Перейдём к изучению подмногообразия M. Распределение $T^{(n_1)}$ задается следующей дифференциальной системой: $\omega^{\alpha}=0$, $\omega^{p+1}=0$, $\omega^{u}=0$. Поскольку $\omega_{a}^{m+1}=\lambda_{a}^{m+1}\omega^{a}$, $\omega_{p+1}^{m+2}=\lambda_{p+1}^{m+2}\omega^{p+1}$, $\omega_{a}^{p+1}=A_{p+1}\omega^{a}$, $\omega_{a}^{m+2}=0$, $\omega_{a}^{u}=A_{u}\omega^{a}$, то, дифференцируя уравнения этой системы внешним образом и учитывая уравнения системы (2), получим $d\omega^{\alpha}=0$, $d\omega^{p+1}=0$, $d\omega^{u}=0$. Это значит, что распределение $T^{(n_1)}$ интегрируемо (см. замечание после теоремы), а ее интегральное многообразие, как это видно из выражения для ω_{a}^{m+1}, ω_{a}^{p+1}, ω_{a}^{u}, является вполне омбилическим подмногообразием в E_{m+2}, т.е. сферой размерности p (поскольку $\lambda_{a}^{m+1}\neq 0$), которую будем обозначать через $S^{p}\left(r\right)$. Сфера $S^{p}\left(r\right)$ имеет только один г.в.к. $\tilde{n}=\lambda_{a}^{m+1}e_{m+1}+A_{p+1}e_{p+1}+A^{u}e_{u}$, где $A^{u}=A_{u}$. Если вектор e_{p+2} выбран параллельно $A^{u}e_{u}$, то $A_{p+3}=0,...,A_{m}=0$ и $\tilde{n}=\lambda_{a}^{m+1}e_{m+1}+A_{p+1}e_{p+1}+A_{p+2}e_{p+2}$.

Распределение $T^{(n_2)}$ задается дифференциальной системой $\omega^{\alpha}=0$, $\omega^{a}=0$, $\omega^{u}=0$. Легко проверить, что $d\omega^{\alpha}=d\omega^{a}=d\omega^{u}=0$. Следовательно, распределение $T^{(n_2)}$ является интегрируемым. Его интегральное многообразие представляет собой некоторую кривую L с единичным касательным вектором e_{p+1} в каждой точке. Распределение T' задается дифференциальной системой $\omega^{\alpha}=0$, $\omega^{a}=0$, $\omega^{p+1}=0$. Легко проверить, что $d\omega^{\alpha}=d\omega^{a}=d\omega^{p+1}=0$. Следовательно, распределение T' интегрируемо, и поскольку в этом случае $\omega_{u}^{\alpha}=\omega_{u}^{a}=\omega_{u}^{p+1}=0$, то его интегральное многообразие представляет собой плоскость L_{ν} размерности ν. Наконец, распределение $T^{(0)}=T^{(n_2)}\oplus T'$ задается дифференциальной системой $\omega^{\alpha}=0$, $\omega^{a}=0$. Тогда $d\omega^{\alpha}=d\omega^{a}=0$, и распределение $T^{(0)}$ интегрируемо. Так как $\omega_{p+1}^{a}=0$, $\omega_{u}^{a}=0$, то его интегральное многообразие $M^{(0)}\left(\dim M^{(0)}=\mu\right)$ является вполне геодезическим в M, а его индекс относительной дефектности равен ν, т.е. $\mu-1$. Поскольку $\omega_{p+1}^{m+1}=0$, $\omega_{u}^{m+1}=0$, $\omega_{p+1}^{a}=0$, $\omega_{u}^{a}=0$, $\omega_{p+1}^{m+2}=\lambda_{p+1}^{m+2}\omega^{p+1}$, $\omega_{u}^{m+2}=0$, то $M^{(0)}$

является нормально плоским локально евклидовым подмногообразием в E_{m+2} и представляет собой огибающую однопараметрического семейства $(\nu+1)-$мерных плоскостей, каждая из которых в точке $x \in M^{(0)}$ определяется плоскостью T_x' и вектором e_{p+1} (последнее отмечено также в [3], гл.5, п. 5.6).

Так как распределение $T^{(1)}$, которое совпадает с $T^{(n_1)}$, интегрируемо, а его интегральное многообразие, т.е. сфера $S^p\left(r\right)$, является вполне омбилическим в M, то выполняются условия теоремы 2.4 в [4]. Согласно этой теореме, искомое подмногообразие M локально изометрично цилиндру над сферой $S^p\left(r\right)$ или цилиндру с $(\mu-1)$-мерными образующими над конусом, построенным над сферой $S^p\left(r\right)$. Учитывая, что распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$ и T' сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия M, рассмотрим ряд случаев.

Пусть распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$, T' параллельны в римановой связности на M. В этом случае, согласно критерию приводимости, M локально является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. произведением гиперсферы $S^p\left(r\right)$, плоской кривой L и плоскости L_ν.

Если на M параллельны распределения $T^{(n_1)}$ и $T^{(0)} = T^{(n_2)} + T'$, то M локально является прямым произведением гиперсферы $S^p\left(r\right)$ и локально евклидовой гиперповерхности $M^{(0)}$ ранга 1, которое представляет собой огибающую однопараметрического семейства $(\nu+1)-$мерных плоскостей.

Пусть на M параллельны распределения $T^{(n_1)} + T'$ и $T^{(n_2)}$. В этом случае M является прямым произведением гиперконуса вращения, плоской кривой (отличной от прямой) и $(\nu-1)-$мерной плоскости $L_{\nu-1}$.

Наконец, если на M параллельны распределения $T^{(n_1)} + T^{(n_2)}$ и T', то в этом случае M является прямым произведением плоскости L_ν и искривлённого конуса, изометричного конусу над сферой $S^p\left(r\right)$. Вопрос существования такого конуса можем решить непосредственно. Действительно, так как распределение T' параллельно, то $\omega_a^u = 0$, $\omega_{p+1}^u = 0$, и, как следствие, из (2) имеем $A_u = 0$, $D_u = 0$.

Тогда

$$d\ln\lambda^{m+2}_{p+1} = D_{p+1}\omega^{p+1},\ \omega^{p+1}_a = A_{p+1}\omega^a,\ \omega^{m+2}_{m+1} = B\omega^{p+1}. \qquad (3)$$

Поскольку $de_u = 0$, что легко проверить, то искомый конус содержится в некотором евклидовом пространстве E_{p+3}. Так как $d\omega^{p+1} = 0$, что также легко проверить, то можем положить $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$, где x^{p+1} − локальная координата на кривой L, которую можно считать длиной дуги. Дифференцируя уравнения (3) внешним образом и применяя лемму Картана, будем иметь

$$dA_{p+1} = \tilde{A}_{p+1}dx^{p+1},\ dD_{p+1} = \tilde{D}_{p+1}dx^{p+1},\ dB = \tilde{B}dx^{p+1},\ dA_{p+1} - A^2_{p+1}dx^{p+1} = 0.$$

Из этих равенств следует, что функции A_{p+1}, D_{p+1} и B зависят только от x^{p+1}. Интегрируя последнее уравнение, находим

$$A_{p+1} = \frac{1}{C - x^{p+1}},\ \lambda^{m+1}_a = \frac{C_1}{C - x^{p+1}},$$

где C, C_1 - постоянные интегрирования, причем $C_1 \neq 0$. Поэтому в дальнейшем, без всякого ущерба для общности, будем предполагать, что $C_1 = 1$. Для радиуса сферы $S^p(r)$ получаем $r = |\tilde{n}|^{-1} = (\sqrt{2}\,\lambda^{m+1}_a)^{-1} = \dfrac{C - x^{p+1}}{\sqrt{2}}$, т.е. радиус является линейной функцией вдоль кривой L. Из $\lambda^{m+2}_{p+1}A_{p+1} + B\lambda^{m+1}_a = 0$ имеем $\lambda^{m+2}_{p+1} = -B.$ Поскольку $\lambda^{m+2}_{p+1} > 0$, то $B < 0$. Теперь легко видеть, что $D_{p+1} = \left(\ln|B|\right)'$. Следовательно, отрицательную функцию $B = B(x^{p+1})$ можем выбрать произвольно. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\omega^{m+1} = \omega^{m+2} = \omega^{m+1}_{p+1} = \omega^{m+2}_a = 0,\ \omega^{m+1}_a = \lambda^{m+1}_a\omega^a,\ \omega^{m+2}_{p+1} = \lambda^{m+2}_{p+1}\omega^{p+1},$$
$$\omega^{m+2}_{m+1} = B\omega^{p+1},\ \omega^{p+1}_a = A_{p+1}\omega^a,\ d\ln\lambda^{m+1}_a = A_{p+1}\omega^{p+1},\ d\ln\lambda^{m+2}_{p+1} = D_{p+1}\omega^{p+1},$$

где $A_{p+1}, D_{p+1}, \lambda^{m+1}_a, \lambda^{m+2}_{p+1}$ определяются по вышеуказанным формулам и $\omega^{p+1} = dx^{p+1}$. Непосредственно проверяется, что эта система вполне интегрируема и задает искомый конус. Поскольку $de_{p+1} = \lambda^{m+2}_{p+1}dx^{p+1}e_{m+2} - A_{p+1}\omega^a e_a$, то при $\omega^a = 0$, т.е. при движении вдоль кривой L, имеем $de_{p+1} = \lambda^{m+2}_{p+1}dx^{p+1}e_{m+2}$.

Отсюда следует, что вдоль L вектор e_{p+1} не является постоянным, а сама кривая L имеет кривизну λ_{p+1}^{m+2}. Следовательно, конус является искривлённым. Более того, при $\omega^{a}=0$ для кривой L получаем следующие формулы Френе:

$$\frac{de_{p+1}}{dx^{p+1}}=\lambda_{p+1}^{m+2}\,e_{m+2}\,,\;\;\frac{de_{m+2}}{dx^{p+1}}=-\lambda_{p+1}^{m+2}\,e_{p+1}+\lambda_{p+1}^{m+2}\,e_{m+1}\,,\;\;\frac{de_{m+1}}{dx^{p+1}}=-\lambda_{p+1}^{m+2}\,e_{m+2}\,.$$

Следовательно, кривая L находится в трёхмерном пространстве и имеет равные кривизну и кручение. Последнее означает, что кривая L является общей винтовой линией, находится на некоторой цилиндрической поверхности и в каждой точке пересекает её прямолинейные образующие под углом в 45° [6]. Далее, поскольку $\omega_{a}^{p+1}=0$ при $\omega^{a}=0$, то вдоль кривой L распределения $T^{(n_1)}$, $T^{(n_2)}$ переносятся параллельно. Следовательно, искривлённый конус можем рассматривать как однопараметрическое семейство сфер, радиус которого является линейной функцией параметра, т.е. искривлённый конус мы можем трактовать как каналовое подмногообразие.

Рассмотрим теперь случай, когда ни одно из рассмотренных выше распределений не является параллельным, и покажем, что тем не менее на подмногообразии M всегда существуют два дополнительных параллельных распределения. Действительно, ранее было установлено, что в каждой точке подмногообразие M расслаивается на сферу $S^{p}\left(r\right)$ и локально евклидово подмногообразие $M^{(0)}$ (которое, в свою очередь, расслаивается на кривую L и плоскость L_{ν}). Следовательно, мы имеем право локальную систему координат $\left(x^{1},\ldots,x^{m}\right)$ на M выбрать следующим образом: $x^{1},\ldots,x^{p}$ – локальная система координат на сфере $S^{p}\left(r\right)$, $x^{p+1},x^{p+2},\ldots,x^{m}$ – локальная система координат на $M^{(0)}$. Поскольку $M^{(0)}$ – локально евклидово, то можем считать, что в этих координатах его метрика имеет вид $\left(dx^{p+1}\right)^{2}+\left(dx^{p+2}\right)^{2}+\ldots+\left(dx^{m}\right)^{2}$. Тогда метрику dS^{2} на подмногообразии M можем представить в следующем виде (см. доказательство теоремы 2.4 в [4]):

$$dS^{2}=\sum_{l=p+1}^{m}\left(dx^{l}\right)^{2}+\left(C_{l}x^{l}+C\right)^{2}dS_{1}^{\,2}\,,\;\sum_{l}C_{l}^{2}\neq 0\,, \tag{4}$$

где $dS_{1}^{\,2}$ - метрика сферы $S^{p}\left(r\right)$. Из этой формулы следует, что подмногообразие M в рассматриваемом общем случае представляет собой скрещенное произведение сферы $S^p\left(r\right)$ и локально евклидова подмногообразия $M^{(0)}$, что другим способом было установлено в [3]. Поскольку вектор $\left(C_{p+1},\ldots,C_m\right)$ мы всегда можем нормировать, то в дальнейшем будем считать его нормированным. Без ущерба для общности можем считать, что $C=0$. Для дальнейшего исследования подмногообразия M метрику (4) можем преобразовать следующим образом. Нормированный вектор $\left(C_{p+1},\cdots,C_m\right)=\left(C^1_{p+1},\cdots,C^1_m\right)$ можем дополнить до ортонормированной системы $\left(C^1_{p+1},\cdots,C^1_m\right)$, $\left(C^2_{p+1},\cdots,C^2_m\right),\ldots,$ $\left(C^{m-p}_{p+1},\cdots,C^{m-p}_m\right)$, содержащей $m-p$ векторов. Рассмотрим ортогональное преобразование $\tilde{x}^{p+1}=C^1_l x^l$, $\tilde{x}^{p+2}=C^2_l x^l,\ldots,\tilde{x}^m=C^{m-p}_l x^l$ локальных координат на $M^{(0)}$. Поскольку евклидова метрика инвариантна относительно ортогональных преобразований, то в новых координатах метрика (4) будет иметь следующий вид:

$$dS^2=\sum_{l=p+1}^{m}\left(d\tilde{x}^l\right)^2+\left(\tilde{x}^{p+1}\right)^2 dS_1{}^2=\sum_{u=p+2}^{m}\left(d\tilde{x}^l\right)^2+\left(d\tilde{x}^{p+1}\right)^2+\left(\tilde{x}^{p+1}\right)^2 dS_1{}^2. \quad (5)$$

Здесь в правой части сумма $\left(d\tilde{x}^{p+1}\right)^2+\left(\tilde{x}^{p+1}\right)^2 dS_1{}^2$ является метрикой конуса над сферой. Если кривая на $M^{(0)}$ с локальной координатой $\tilde{x}^{p+1}$ представляет собой прямую, то имеем конус вращения, а в противном случае – искривлённый конус.

Пусть $\tilde{e}_{p+1},\tilde{e}_{p+2},\ldots,\tilde{e}_m$ обозначают, соответственно, единичные касательные векторы на $M^{(0)}$ к кривым с локальными координатами $\tilde{x}^{p+1},\tilde{x}^{p+2},\ldots,\tilde{x}^m$. Через $((\tilde{e}_{p+1}))$ и $((\tilde{e}_{p+2},\ldots,\tilde{e}_m))$ будем обозначать соответствующие распределения. Из вида метрики (5) следует, что распределения $((\tilde{e}_{p+2},\ldots,\tilde{e}_m))$ и $T^{(n_1)}+((\tilde{e}_{p+1}))$ являются параллельными в римановой связности на подмногообразии M. Поскольку в общем случае эти распределения не сопряжены относительно второй фундаментальной формы, то M является сплетающимся произведением $(m-p-1)$-мерного локально евклидова подмногообразия $\tilde{M}$, которое является интегральным многообразием распределения $((\tilde{e}_{p+2},\ldots,\tilde{e}_m))$, и искривлённого конуса над сферой $S^p\left(r\right)$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть в евклидовом пространстве* E_{m+2} *тензор Риччи* m*-мерного нормально плоского риччи-полусимметрического подмногообразия* M *имеет только одно ненулевое собственное значение, которому отвечает только один регулярный главный вектор кривизны кратности* $p \geq 2$, *и пусть индексы дефектности* μ *и относительной дефектности* ν *удовлетворяют условию* $\mu = \nu + 1$. *Если* M *неприводимо, то локально оно является или искривлённым конусом над сферой* $S^p\left(r\right)$, *где радиус* r *есть линейная (непостоянная) функция от координаты криволинейной образующей конуса, которая представляет собой общую винтовую линию с равными кривизной и кручением, расположенную в трёхмерном пространстве, или же* M *представляет собой сплетающееся произведение* $(m-p-1)$*-мерного локально евклидова подмногообразия* $\tilde{M}$ *и искривлённого конуса над сферой* $S^p\left(r\right)$. *Если* M *приводимо, то оно является открытой частью одного из следующих прямых произведений:*

$$S^p(r) \times L \times L_\nu,\ S^p(r) \times M^{(0)},\ C^{p+1} \times L \times L_{\nu-1},\ \tilde{C}^{p+1} \times L_\nu,$$

где L *- плоская кривая, отличная от прямой,* $M^{(0)}$ *- гиперповерхность ранга 1 (следовательно, локально евклидова), которая представляет собой огибающую однопараметрического семейства* $(\nu+1)-$*мерных плоскостей,*

$C^{p+1} -$ *гиперконус над сферой* $S^k(r)$, $\tilde{C}^{p+1} -$ *искривлённый конус над сферой* $S^k(r)$, $L_{\nu-1}$ *и* $L_\nu -$ *плоскости соответствуюших размерностей.*

В ходе доказательства этой теоремы было установлено, что распределение кодефектности $T^{(1)}$, которое совпадало с распределением $T^{(n_1)}$, интегрируемо. Однако в общем случае распределение $T^{(1)}$ может быть неинтегрируемым. Приведём два критерия интегрируемости распределения $T^{(1)}$.

1. *Пусть* M *является нормально плоским подмногообразием в* E_n *с индексом дефектности* $\mu > 0$ *и нулевым индексом относительной дефектности* $(\nu = 0)$. *Тогда его распределение кодефектности* $T^{(1)}$ *интегрируемо.*

2. *Пусть* M *является нормально плоским подмногообразием в* E_n *и пусть его индекс дефектности совпадает с индексом относительной дефектности, т.е.* $\mu = \nu$. *Если распределение кодефектности* $T^{(1)}$ *является омбилическим относительно некоторого нормального векторного поля, то оно интегрируемо.*

Доказательство. Пусть $e_a \in T_x^{(0)}$, $e_r \in T_x^{(1)}$, $a,b,c = 1,\dots,\mu$, $r,s,t = \mu+1,\dots,m$. Тогда, согласно известному результату Чженя-Кюйпера, $\omega_r^a = 0 (\mathrm{mod}\, \omega^r)$. Распределение $T^{(1)}$ задается пфаффовой системой $\omega^\alpha = 0, \omega^a = 0$. Тогда $d\omega^\alpha = 0$, $d\omega^a = \omega^r \wedge \omega_r^a$, где первое равенство получено с учётом формулы $\omega_r^\alpha = \lambda_r^\alpha \omega^r$. Покажем, что правая часть второго равенства также равна нулю. Действительно, из третьего уравнения системы (1) при $i = a$, $j = r$ имеем $(\lambda_r^\alpha - \lambda_a^\alpha)\omega_r^a = h_{ars}^\alpha \omega^s$. Если $\lambda_r^\alpha - \lambda_a^\alpha = 0$ при любых значениях α, то векторы n_a и n_r будут совпадать. Это противоречит их ортогональности, поскольку $n_a \in W^{(0)}$, $n_r \in W^{(1)}$. Следовательно, $\lambda_r^\alpha - \lambda_a^\alpha \neq 0$ хотя бы при одном значении индекса α. Пусть $n_a \neq 0$. Умножая полученное равенство на λ_a^α, суммируя по α и учитывая ортогональность векторов n_a, n_r, получим $|n_a|^2 \omega_r^a = -\sum_\alpha \lambda_a^\alpha h_{ars}^\alpha \omega^s$, где в левой части нет суммирования по a. Умножая внешним образом это равенство на ω^r и суммируя, будем иметь

$$|n_a|^2 \omega_r^a \wedge \omega^r = -\sum_\alpha \lambda_a^\alpha h_{ars}^\alpha \omega^s \wedge \omega^r = 0,$$

так как функции h_{ars}^α симметричны по индексам r, s, а выражение $\omega^s \wedge \omega^r$ кососимметрично по этим индексам. Поскольку $n_a \neq 0$, то $\omega_r^a \wedge \omega^r = 0$ и, следовательно, $d\omega^a = \omega^r \wedge \omega_r^a = 0$. Если $n_a \neq 0$ при всех значениях a, то $d\omega^a = 0$ для любого a, и распределение $T^{(1)}$ интегрируемо, что и доказывает первый критерий.

Пусть $n_a = 0$ при некотором a, т.е. $\lambda_a^\alpha = 0$ для любого α. В этом случае полученное выше равенство принимает вид $\lambda_r^\alpha \omega_r^a = h_{ars}^\alpha \omega^s$. Пусть при некотором фиксированном значении α матрица $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$ имеет на $T_x^{(1)}$ только одно собственное значение $\lambda_r^\alpha = \lambda_s^\alpha = \lambda^\alpha \neq 0$. Умножая внешним образом это равенство на ω^r и суммируя, получим

$$\lambda_r^\alpha \omega_r^a \times \omega^r = \lambda^\alpha (\omega_r^a \times \omega^r) = h_{ars}^\alpha \omega^s \times \omega^r = 0.$$

Тогда $\omega_r^a \times \omega^r = 0$ и, следовательно, $d\omega^a = \omega^r \wedge \omega_r^a = 0$, причём это верно для любого значения a, такого, что $n_a = 0$. Таким образом, если все векторы n_a являются нулевыми, то распределение $T^{(1)}$ интегрируемо, что и доказывает второй критерий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Szabo Z.I**. Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X,Y) \cdot R = 0$. I. The local version // J. Differential Geom. – 1982. - 17**,** № 4. – P. 531-582.
2. **Мирзоян В.А.** Структурные теоремы для римановых Ric-полусимметрических пространств // Изв. Вузов. Математика. -1992. -№6. –С. 80-89.
3. **Lumiste Ü.** Semiparallel submanifolds in space forms. - New York: Springer, 2009. -306 p.
4. **Мирзоян В.А.** Скрещенные произведения, конусы над эйнштейновыми пространствами и классификация одного класса Ric-полупараллельных подмногообразий // Изв. РАН. Сер.Матем. - 2003. -67, №5. –С.107-124.
5. **Мирзоян В.А.** Нормально плоские полуэйнштейновы подмногообразия в евклидовых пространствах // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2011. - 75, № 6. – С. 47-78.
6. **Фиников С.П.** Курс дифференциальной геометрии. - М.: УРСС, 2017. -344 с.

Վ.Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԿՈՉԱՓԱՆԻ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐՈՒԹՅԱՆ ՄԻԱՎՈՐ ԻՆԴԵՔՍՈՎ ԿԻՍԱԶՈՒԳԱՀԵՌ ԵՆԹԱԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ

Տրվում է նորմալ հարթ մեկ ռեգուլյար կորության գլխավոր վեկտորով, որը ունի պատիկություն, և մեկ զրոյից տարբեր սինգուլյար կորության գլխավոր վեկտորով կիսազուգահեռ ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը էվկլիդեսյան տարածություններում: Ստացվել է նորմալ հարթ ենթաբազմաձևության կոդեֆեկտության բաշխման ինտեգրելիության երկու հայտանիշ:

Առանցքային բառեր. էյնշտեյնյան, կիսաէյնշտեյնյան և կիսազուգահեռ ենթաբազմաձևություններ, կիսասիմետրիկ և ռիչչի–կիսասիմետրիկ ենթաբազմա-ձևություններ:

V.A. MIRZOYAN

GEOMETRY OF ONE CLASS OF SEMIPARALLEL SUBMANIFOLDS OF CODIMENSION TWO WITH UNITY INDEX OF REGULARITY

The geometric description of normally flat semiparallel submanifolds with one regular principal curvature vector having multiplicity and one nonzero singular principal curvature vector in Euclidean spaces is given. Two criteria for integrability of the conullity distribution of normally flat submanifolds are obtained.

Keywords: Einstein, semi-Einstein and semiparallel submanifolds, semisymmetric and ricci-semisymmetric submanifolds.

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН

О НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для гиперболического уравнения второго порядка. Получены условия, при которых задача однозначно разрешима, и при этом условии решение получено в явном виде в виде ряда по полиномам Чебышева.

Ключевые слова: задача Дирихле, гиперболическое уравнение, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, многочлены Чебышева.

Пусть $D = \{z = x + iy : \left|z\right| = r < 1\}$ - единичный круг комплексной плоскости, а $\Gamma = \partial D$ - его граница. В области D рассмотрим уравнение второго порядка:

$$AV_{xx} + 2BV_{xy} + CV_{yy} = 0 . \qquad (1)$$

Здесь A, B, C - такие числа ($C \neq 0$), что корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения $A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$ действительны. Предполагается, что искомое решение V дважды непрерывно дифференцируемо в D и удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е. $V \in C^{(\alpha)}\left(\overline{D}\right)$. Для уравнения (1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе $\Gamma = \partial D$ неизвестная функция V удовлетворяет условиям Дирихле

$$V\big|_{\Gamma} = f\left(x, y\right), \ \left(x, y\right) \in \Gamma. \qquad (2)$$