

V.A. MIRZOYAN

## GEOMETRY OF ONE CLASS OF SEMIPARALLEL SUBMANIFOLDS OF CODIMENSION TWO WITH UNITY INDEX OF REGULARITY

The geometric description of normally flat semiparallel submanifolds with one regular principal curvature vector having multiplicity and one nonzero singular principal curvature vector in Euclidean spaces is given. Two criteria for integrability of the conullity distribution of normally flat submanifolds are obtained.

**Keywords:** Einstein, semi-Einstein and semiparallel submanifolds, semisymmetric and ricci-semisymmetric submanifolds.

УДК 517.946

А.О. БАБАЯН

## О НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Рассматривается задача Дирихле в единичном круге для гиперболического уравнения второго порядка. Получены условия, при которых задача однозначно разрешима, и при этом условии решение получено в явном виде в виде ряда по полиномам Чебышева.

**Ключевые слова:** задача Дирихле, гиперболическое уравнение, нетривиальные решения однородной задачи Дирихле, многочлены Чебышева.

Пусть  $D = \{z = x + iy : |z| = r < 1\}$  - единичный круг комплексной плоскости, а  $\Gamma = \partial D$  - его граница. В области  $D$  рассмотрим уравнение второго порядка:

$$AV_{xx} + 2BV_{xy} + CV_{yy} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $A, B, C$  - такие числа ( $C \neq 0$ ), что корни  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения  $A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$  действительны. Предполагается, что искомое решение  $V$  дважды непрерывно дифференцируемо в  $D$  и удовлетворяет условию Гельдера вплоть до границы, т.е.  $V \in C^{(\alpha)}(\bar{D})$ . Для уравнения (1) рассматриваем задачу Дирихле в классической постановке. На границе  $\Gamma = \partial D$  неизвестная функция  $V$  удовлетворяет условиям Дирихле

$$V|_{\Gamma} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Здесь заданная функция  $f$  принадлежит классу  $C^{(\alpha)}(\Gamma)$ . Как известно (см. [1]), задача (1), (2) для гиперболического уравнения не является корректной. Однако, как было показано позднее, в этом случае также возможно получить содержательные результаты. В работе [2] была рассмотрена задача Дирихле для уравнения  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  в прямоугольнике. Были получены соотношения длин сторон прямоугольника, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1), (2). Далее в работе Ф. Джона [3] была исследована задача Дирихле для уравнения  $u_{xy} = 0$  в произвольной области. В этой работе было показано, что существование и единственность решения задачи определяются топологическими свойствами границы рассматриваемой области. В работе Р.А. Александрияна [4] была рассмотрена однородная (при  $f \equiv 0$ ) задача (1), (2) в единичном круге. Были получены условия на коэффициенты уравнения (1), обеспечивающие наличие нетривиальных решений однородной задачи. Отметим также недавнюю работу [5], где была изучена задача Дирихле для гиперболической системы первого порядка. В этой работе так же, как и в работе [3], выявлена зависимость корректности постановки задачи от топологии границы.

В предлагаемой работе описан новый метод решения задачи (1), (2), позволяющий представить решения в виде ряда по полиномам Чебышева. Сначала предположим, что  $\lambda_1, \lambda_2$  - корни характеристического уравнения, различны. В этом случае общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$V(x, y) = \Psi_1(x + \lambda_1 y) + \Psi_2(x + \lambda_2 y), \quad (3)$$

где  $\Psi_j$  ( $j = 0, 1$ ) - дважды непрерывно дифференцируемые функции в областях  $D(\lambda_j) = \{x + \lambda_j y \mid (x, y) \in D\}$  соответственно. Перейдем в (3) к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Подставляя эти выражения в (3) и выполняя некоторые преобразования, получаем представление решения, которое и будем использовать в дальнейшем:

$$V(r, \varphi) = \Phi_1(r \cos(\varphi - \alpha_1)) + \Phi_2(r \cos(\varphi - \alpha_2)), \quad (4)$$

где  $\alpha_j$  - угол, определяемый из соотношений

$$\cos \alpha_j = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_j^2}}, \quad \sin \alpha_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{1 + \lambda_j^2}}, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь  $\Phi_j$  ( $j = 0, 1$ ) - дважды непрерывно дифференцируемые функции в областях  $D(\lambda_j)$  соответственно, которые следует определить.

Подставим функцию (4) в граничное равенство (2). Имеем

$$\Phi_1(\cos(\varphi - \alpha_1)) + \Phi_2(\cos(\varphi - \alpha_2)) = F(\varphi), \quad F(\varphi) = f(\cos \varphi, \sin \varphi). \quad (6)$$

Используя тот факт, что функции  $\Phi_j(\cos \varphi)$  - четные функции при  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , будем искать неизвестные функции  $\Phi_j$  в виде ряда по полиномам Чебышева:

$$\Phi_j(r \cos(\varphi - \alpha_j)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} T_k(r \cos(\varphi - \alpha_j)), \quad j = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь  $T_j$  - многочлены Чебышева первого рода порядка  $j$ ;  $A_{jk}$  - постоянные, которые необходимо определить. На границе  $\Gamma$  (при  $r = 1$ ) получаем представление неизвестных функций в виде рядов Фурье:

$$\Phi_j(\cos(\varphi - \alpha_j)) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} \cos k(\varphi - \alpha_j), \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Разложим граничную функцию  $F$  в ряд Фурье:

$$F(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (9)$$

где  $a_k, b_k$  - коэффициенты Фурье функции  $F$ , и подставим разложения (8) и (9) в граничное условие (6). Получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{1k} \cos k(\varphi - \alpha_1) + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \cos k(\varphi - \alpha_2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

или

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} ((A_{1k} \cos k\alpha_1 + A_{2k} \cos k\alpha_2) \cos k\varphi + (A_{1k} \sin k\alpha_1 + A_{2k} \sin k\alpha_2) \sin k\varphi) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при  $\cos k\varphi$  и  $\sin k\varphi$  при  $k \geq 1$ , получим систему для определения неизвестных  $A_{jk}$ :

$$\begin{cases} A_{1k} \cos k\alpha_1 + A_{2k} \cos k\alpha_2 = a_k, \\ A_{1k} \sin k\alpha_1 + A_{2k} \sin k\alpha_2 = b_k. \end{cases} \quad (10)$$

Определитель матрицы системы (10) равен  $\sin k(\alpha_1 - \alpha_2)$ , следовательно, если выполняются условия

$$\sin k(\alpha_1 - \alpha_2) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

то система (10) имеет единственное решение  $A_{jk}$  при  $k \geq 1$ . При этом условии решение задачи (1), (2) имеет вид

$$V(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_{1k} T_k(r \cos k(\varphi - \alpha_2)) - G_{2k} T_k(r \cos k(\varphi - \alpha_1))}{\sin k(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (12)$$

где

$$G_{jk} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \sin k(\theta - \alpha_j) d\theta, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

Пусть условие (11) нарушается при некотором  $m$ . Тогда из (11) имеем  $\sin m(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$  и, следовательно,

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi n}{m}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

В этом случае ненулевыми решениями однородной задачи будут функции

$$V_j = T_{mj}(r \cos(\varphi - \alpha_1)) + (-1)^{nj+1} T_{mj}\left(r \cos\left(\varphi - \alpha_1 - \frac{\pi n}{m}\right)\right), \quad j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Эти функции линейно независимы, так как являются многочленами разной степени. Для разрешимости неоднородной задачи необходимо бесконечное множество линейно независимых условий ортогональности:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \sin ml(\theta - \alpha_1) d\theta = 0, \quad l = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - корни характеристического уравнения, различны. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима при условиях (11), и решение определяется по формуле (12). При нарушении условий (11) однородная задача (1), (2) имеет бесконечное множество линейно независимых решений вида (15), а для разрешимости соответствующей неоднородной задачи необходимо бесконечное множество линейно независимых условий ортогональности вида (16).

**Замечание.** Следует отметить, что условие (14), а также формула (15) для решения однородной задачи (1), (2) другим методом были получены в [4].

Теперь рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет двукратный действительный корень, т.е.  $\lambda_1 = \lambda_2$ . В этом случае общее решение уравнения (1) имеет вид

$$V(r, \varphi) = M_1(r \cos(\varphi - \alpha_1)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} M_2(r \cos(\varphi - \alpha_1)), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (17)$$

Здесь  $M_j$  - функции, подлежащие определению, угол  $\alpha_1$  определяется в (5). Будем искать функции  $M_j$  в виде ряда по полиномам Чебышева:

$$M_j(r \cos(\varphi - \alpha_j)) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{jk} T_k(r \cos(\varphi - \alpha_j)), \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Подставим функцию (17) в граничное условие (2). Получим

$$M_1(\cos(\varphi - \alpha_1)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} M_2(\cos(\varphi - \alpha_2)) = F(\varphi). \quad (19)$$

Здесь  $F$  - функция (9). Используя (18), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{1k} \cos k(\varphi - \alpha_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k} \cos k(\varphi - \alpha_2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

или

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_{1k} \cos k(\varphi - \alpha_1) - \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} k \sin k(\varphi - \alpha_2) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Преобразуя последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} ((B_{1k} \cos k\alpha_1 + B_{2k} k \sin k\alpha_1) \cos k\varphi + (B_{1k} \sin k\alpha_1 - B_{2k} k \cos k\alpha_1) \sin k\varphi) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем  $B_{00} = 0.5a_0$ , а при  $k \geq 1$ , аналогично (10), получим систему для определения  $B_{jk}$ :

$$\begin{cases} B_{1k} \cos k\alpha_1 + B_{2k} k \sin k\alpha_1 = a_k, \\ B_{1k} \sin k\alpha_1 - B_{2k} k \cos k\alpha_1 = b_k, \end{cases}$$

при решении которой получим

$$B_{1k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) \cos k(\theta - \alpha_1) d\theta, \quad B_{2k} = -\frac{G_{1k}}{k}, \quad (20)$$

где  $G_{1k}$  определено в (13). Подставляя последние соотношения в (18) и далее в (17), однозначно определяем искомую функцию  $V$ :

$$V(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( B_{1k} T_k(r \cos(\varphi - \alpha_1)) + \frac{G_{1k}}{k} r \sin(\varphi - \alpha_1) T'_k(r \cos(\varphi - \alpha_1)) \right),$$

или, учитывая равенство  $T'_k(x) = kU_{k-1}(x)$  (см. [6], формула (2.48)), где  $U_{k-1}$  - полином Чебышева второго рода порядка  $k-1$ , окончательно получаем

$$V = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( B_{1k} T_k(r \cos(\varphi - \alpha_1)) + G_{1k} r \sin(\varphi - \alpha_1) U_{k-1}(r \cos(\varphi - \alpha_1)) \right). \quad (21)$$

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** Если коэффициенты уравнения (1) таковы, что характеристическое уравнение  $A + B\lambda + C\lambda^2 = 0$  имеет двукратный корень, то задача (1), (2) однозначно разрешима, и решение определяется по формуле (21).

**Замечание.** Отметим, что формула (21) может быть получена из формулы (12) формальным переходом к пределу при  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Courant R., Hilbert D.** Methods of Mathematical Physics. – New York, Chichester etc.: John Wiley & Sons, 1989. - 831p.
2. **Bourgin D.G., Duffin R.** The Dirichlet problem for the vibrating string equation// Bull. AMS. -1939. - V.45.-P.851-859.
3. **John F.** The Dirichlet problem for a Hyperbolic Equation// American Journal of Mathem. – 1941.-V.63 (1).-P.141-155.
4. **Александрян Р.А.** Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л. Соболева// Труды Московского матем. общества. -1960.-Т.9. - С.455-505.
5. **Жура Н.А., Солдатов А.П.** Граничная задача для гиперболической системы первого порядка в двухмерной области// Известия РАН. Сер. Математика.-2017.- Т.81, №3.-С.83-108.
6. **Mason J.C., Handscomb D.C.** Chebyshev Polynomials. – London, New York etc.: Chapman & Hall/CRC, 2003. – 335p.

## Ա.Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ

### ՄԻԱՎՈՐ ՇՐՋԱՆՈՒՄ ՄԻ ՀԻՊԵՐԲՈԼԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌԻ ԽՆԴԻՐԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը միավոր շրջանում երկրորդ կարգի հիպերբոլային հավասարման համար: Գտնվել են խնդրի միարժեք լուծելիության պայմանները, և այդ պայմանների առկայության դեպքում լուծումը որոշվել է բացահայտ շարքի տեսքով՝ Չեբիշևի բազմանդամներով:

**Առանցքային բառեր.** Դիրիխլեի խնդիր, հիպերբոլային հավասարում, Դիրիխլեի համասեռ խնդրի ոչ գրոյական լուծումները, Չեբիշևի բազմանդամներ:

## A.H. BABAYAN

### AN INHOMOGENEOUS DIRICHLET PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC EQUATION IN THE UNIT DISC

The Dirichlet problem in a unit disc for a second order hyperbolic equation is considered. The conditions of the unique solvability of the problem are found and, in this case, the solution is determined explicitly in the form of series by Chebyshev polynomials.

**Keywords:** Dirichlet problem, hyperbolic equation, nontrivial solutions of homogeneous Dirichlet problem, Chebyshev polynomials.