

Լ.Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎ՝ ՀԱՐՄԱՐ ԱՐՏԱՐԿՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Առաջարկվում է հավասարադաս հանգույցների համար միջարկման բանաձև, որն օգտագործում է միայն ֆունկցիայի արժեքները հանգույցներում:

Առանցքային բառեր. Լագրանժի և Նյուտոնի միջարկման բանաձևեր, արտարկում, նույնություններ բինոմական գործակիցների համար:

Պարզագույն դեպքում միջարկման խնդիրը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[a; b]$ հատվածում, և տրված են այդ հատվածին պատկանող $n + 1$ տարբեր կետեր՝ x_0, x_1, \dots, x_n , որոնք կոչվում են միջարկման հանգույցներ: Որոշվում է n -ից ոչ բարձր կարգի $L_n(f, x)$ բազմանդամ, որն ամեն մի x_k կետում ընդունում է $f(x_k)$ արժեքը:

Դժվար չէ համոզվել, որ՝

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

բանաձևով որոշվող Լագրանժի ֆունդամենտալ բազմանդամ կոչվող արտահայտությունը բավարարում է բիօրթոգոնալության

$$l_k(x_m) = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 1, & k = m \end{cases}$$

պայմանին: Այստեղից անմիջապես բխում է, որ վերոհիշյալ խնդրի լուծումն ունի

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x)$$

տեսքը:

Լագրանժի միջարկման բանաձևը երբեմն հարմար չէ օգտագործման համար, քանի որ միջարկման նոր հանգույց ավելացնելու դեպքում ողջ հաշվարկը նորից կատարելու անհրաժեշտություն է առաջանում: Այս թերությունը շտկված է Նյուտոնի միջարկման բանաձևում: Այն ունի

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

տեսքը, որտեղ $f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, իսկ հետագա գործակիցները որոշվում են

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k) - f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

անդրադարձ բանաձևով:

```
function P=baryLag(x,y)
n=length(x);
u=zeros(n,1);
syms t
s=0;q=0;
for k=1:n
    u(k)=prod(x(k)-x([1:k-1 k+1:n]));
    w(k)=1/u(k);
    s=s+w(k)/(t-x(k));
    q=q+w(k)*y(k)/(t-x(k));
end
P=simplify(q/s);
```

Նյութոսնի միջարկման բազմանդամն ընդունում է ավելի պարզ տեսք, երբ հանգույցները հավասարահեռ են: Այդ ժամանակ վերը սահմանված բաժանված տարբերությունները փոխարինվում են վերջավոր տարբերություններով, որոնք կրկին սահմանվում են անդրադարձ եղանակով

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \quad \Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, \\ \dots, \quad \Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k.$$

Եթե միջարկման հանգույցների հեռավորությունը (միջարկման քայլը) նշանակենք $h = x_{k+1} - x_k$ -ով, ապա

$$\begin{aligned}
f(x_0, x_1) &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{1}{h} \Delta y_0, \\
f(x_0, x_1, x_2) &= \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \\
&= \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{1}{2h^2} \Delta^2 y_0, \\
&\dots \\
f(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \frac{f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) - f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)}{x_n - x_0} = \\
&= \frac{\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0}{nh \cdot h^{n-1} (n-1)!} = \frac{1}{h^n n!} \Delta^n y_0 :
\end{aligned}$$

Այսպիսով, Նյուտոնի միջարկման բազմանդամը հավասարաիտե հանգույցների դեպքում ընդունում է

$$\begin{aligned}
P(x) &= y_0 + \Delta y_0 \cdot \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_0 - h}{h} + \dots \\
&+ \frac{\Delta^n y_0}{n!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \frac{x - x_0 - h}{h} \dots \frac{x - x_0 - (n-1)h}{h} = \\
&= y_0 + \Delta y_0 \cdot \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) + \\
&\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \dots \left(\frac{x - x_0}{h} - n + 1 \right)
\end{aligned}$$

տեսքը:

Այս բանաձևն այն առավելությունն ունի, որ նոր հանգույց ավելացնելու պարագայում, եղածը պահպանելով անփոփոխ, անհրաժեշտ է ավելացնել մի նոր անդամ միայն: Որպես թերություն նշենք բաժանված տարբերությունները հաշվելու համար անհրաժեշտ լրացուցիչ աշխատանքը:

Ստորև առաջարկվում է բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս գտնել նոր հանգույցում միջարկման բազմանդամի արժեքը, օգտագործելով նախորդ հանգույցներում եղած արժեքները՝ առանց լրացուցիչ հաշվարկների:

Այդ նպատակով դուրս բերենք բանաձև, որն n -ից ոչ բարձր կարգի բազմանդամի արժեքը հաջորդ հանգույցում արտահայտում է այդ բազմանդամի արժեքներով նախորդ $n + 1$ հանգույցներում:

Համաձայն [1] տեղեկագրքի 4.2.2.15 բանաձևի՝

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k (x+k)^m C_n^k = 0, m=0,1,\dots,n-1.$$

Տեղադրելով x -ի փոխարեն x/h և n -ի փոխարեն $n+1$, կստանանք՝

$$x^m = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} (x+kh)^m C_{n+1}^k, m=0,1,\dots,n,$$

ինչը նշանակում է, որ x^m -ի արժեքները կարելի է արտահայտել որպես $(x+kh)^m$ արժեքների գծային կոմբինացիա: Ուստի կամայական n -ից ոչ բարձր կարգի P բազմանդամի համար՝

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} P(x+kh) C_{n+1}^k :$$

Եթե P -ն f ֆունկցիան $x_k = x+kh, k=1,2,\dots,n+1$ կետերում միջարկող բազմանդամն է, ապա $f(x_k) = P(x_k), k=1,2,\dots,n+1$, ուստի՝

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} f(x+kh) C_{n+1}^k :$$

Այս բանաձևն իրականացնում է արտարկում դեպի ձախ, իսկ

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} f(x-kh) C_{n+1}^k$$

բանաձևը՝ արտարկում դեպի աջ:

```
function x=extrapol(D,F,d)
n=length(D);
A=zeros(1,n);
for k=1:n
    A(k)=(-1)^(1+k)*nchoosek(n,k);
end
if d==1
    x=dot(A,flipr(D));
else
    x=dot(A,D);
end
```

Ստորև բերված աղյուսակում նշված են սինուս ֆունկցիայի արժեքները [1.4; 2] միջակայքում 0.1 քայլով:

Աղյուսակ

Աղյուսակային արժեք	Արտարկման արժեք
0.908633496115883	0.908633487115031
0.912763940260521	0.912763940217399
0.916803108771767	0.916803108772679
0.920750597736136	0.920750597736127
0.924606012408020	0.924606012367632
0.928368967249167	0.928368967250075
0.932039085967226	0.932039085973613

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. - М.: Наука, 1981.- 800 с.

Լ.Յ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА, УДОБНАЯ ДЛЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ

Предлагается интерполяционная формула для равноотстоящих узлов, использующая только значения функции в узлах интерполяции.

Ключевые слова: интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона, экстраполяция, тождества для биномиальных коэффициентов.

L.Z. GEVORGYAN

AN INTERPOLATION FORMULA CONVENIENT FOR EXTRAPOLATION

An interpolation formula using only the values of the function at equidistant knots is proposed.

Keywords: Lagrange and Newton interpolation formulae, extrapolation. Identities for binomial coefficients.