УДК 517.946

Г.М. АЙРАПЕТЯН, А.Д. ОГАНЯН

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается граничная задача Римана в верхней полуплоскости в весовом пространстве в смысле средней сходимости. Предполагается, что весовая функция обращается в нуль в счетном числе точек. При некоторых условиях на распределение нулей весовой функции доказывается, что задача нормально разрешима в пространствах $L^p(\rho)(1<p<\infty)$. При $p=1$ доказывается, что однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений.

***Ключевые слова*:** задача Римана, весовое пространство, сходимость в среднем, линейно независимые решения однородной задачи.

1. Пусть G^+ - односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная спрямляемой кривой L, а G^- - дополнение множества $G^+ \bigcup L$. Граничная задача Римана формулируется в виде (см. [1]-[4]): определить аналитические в $G^\pm$ функции $\varphi^\pm$, $(\varphi^-(\infty)=0)$ так, чтобы имело место равенство

$$\varphi^+(t)-a(t)\varphi^-(t)=f(t),\ \ t\in L,$$

где a и f - заданные функции на L. Исследование этой задачи опирается на тот факт, что интеграл типа Коши является ограниченным оператором в пространствах C^α и L^p $(1<p<\infty)$.

Для исследования граничной задачи Римана в классе L^1 в работе [5] была предложена новая постановка этой задачи в виде: определить аналитические функции $\varphi^\pm$, $(\varphi^-(\infty)=0)$ так, чтобы имело место равенство

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\varphi^+(x+iy)-a(t)\varphi^-(x-iy)-f(t)\right\|_{L^1}=0\,.$$

В аналогичной постановке граничная задача Римана исследована в пространствах C, L^∞, W (см. [6]-[8]). В работах [9]-[11] исследованы аналогичные граничные задачи в весовых пространствах, когда весовая функция обращается в нуль в конечном числе точек границы. В настоящей работе рассматривается граничная задача Римана в верхней полуплоскости $D^+=\{z; Imz>0\}$ в следующей постановке: определить аналитическую в $D^+\bigcup D^-$ $(D^-=\{z; Imz<0\})$ функцию $\varphi(z)$, $\varphi(z)\in A$ так, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{r\to 1-0}\left\|\varphi^{+}\left(x+iy\right)-a\left(t\right)\varphi^{-}\left(x-iy\right)-f\left(t\right)\right\|_{L^{p}(\rho)}=0\,, \qquad (1)$$

где $\rho\left(t\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left|t_k-t\right|^{\delta_k}}{\left|i-t\right|^{\delta_k}}$, $1>\delta_k>0,\ \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k<\infty,\ t_k\in\left(-\infty,+\infty\right)$.

При $1<p<\infty$ устанавливается, что задача (1) нормально разрешима, т.е. однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима для любой функции $f\in L^{p}\left(\rho\right)$. При $p=1$ устанавливается, что однородная задачи (1) имеет бесконечное число линейно независимых решений

$$\varphi_{\kappa}\left(z\right)=\frac{1}{t_k-z},\ k=1,2,\ldots$$

2. В этом пункте будем расматривать задачу (1), когда $a\left(t\right)\equiv 1$.

Лемма 1. Пусть $\left\{A_k\right\}_1^{\infty}$ - последовательность комплексных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|A_k\right|<\infty\ . \qquad (2)$$

Тогда функция

$$\Phi_0\left(z\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-t_k} \qquad (3)$$

является решением однородной задачи

$$\lim_{y\to 0}\left\|\varphi^{+}\left(x+iy\right)-\varphi^{-}\left(x-iy\right)\right\|_{L^{1}_{(\rho)}}=0\ . \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть $\Phi_{0\kappa}\left(z\right)=\left(z-t_k\right)^{-1}$, $k=1,2,\ldots$. Так как

$$\Phi_{0k}\left(x+iy\right)-\Phi_{0k}\left(x-iy\right)=\frac{y}{\left(t_k-x\right)^2+y^2}\ ,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|t_k-t\right|^{\delta_k}\ y}{\left(\left(t_k-x\right)^2+y^2\right)\left|i-t\right|^{\delta_k}}dt\to 0\,.$$

Далее имеем

$$\Phi_0\left(x+iy\right)-\Phi_0\left(x-iy\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k y}{\left(t_k-x\right)^2+y^2}.$$

Поскольку эта сумма равномерно сходится, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Phi_0\left(x+iy\right)-\Phi_0\left(x-iy\right)\right|\rho\left(x\right)dx\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left|A_k\right|y^{1-\delta_k}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|A_k\right|y^{1-\delta_k}\to 0$$

при $y\to 0$, получаем доказательство леммы.

3. В дальнейшем будем предполагать, что последовательность $\left\{t_k\right\}_1^{\infty}$ стремится к единице.

Теорема 1. Пусть последовательность $\left\{t_k\right\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$\left|t_k-t_j\right|>c\left|t_k-1\right|,\ \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\ln\left|1-t_k\right|>-\infty. \tag{5}$$

Тогда общее решение однородной задачи (4) можно представить в виде (3), где $\left\{A_k\right\}_1^{\infty}\in l_1$.

Лемма 2. Функция $\rho\left(t\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left|t_k-t\right|^{\delta_k}}{\left|i-t\right|^{\delta_k}}$ непрерывна в точке 1 тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\ln\left|1-t_k\right|=-\infty. \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть последовательность $\left\{t_k\right\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию (6), тогда общее решение задачи (3) можно представить в виде

$$\Phi_0\left(z\right)=\frac{A_0}{z-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-t_k},$$

где $\left\{A_k\right\}_1^{\infty}\in l_1$, а A_0 - произвольное комплексное число.

4. Пусть $t_k' = \frac{1}{2}\left(t_k + t_{k+1}\right)$. Обозначим

$$f_k\left(t\right) = f\left(t\right),\ t \in \left(t_k', t_k''\right) \text{ и } f_k\left(t\right) = 0,\ t \in \left(-\infty, t_k'\right] \cup \left[t_k'', \infty\right).$$

Пусть далее

$$\varphi_{1k}\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i(t_k - z)} \int_{t_k'}^{t_{k+1}''} \frac{f_k\left(t\right)\left(t_k - t\right)}{t - z} dt, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Лемма 3 . Справедлива оценка

$$\left\| \varphi_{1k}^{+}\ \left(x + iy\right) - \varphi_{1k}^{-}\ \left(x - iy\right) \right\|_{L^1(\rho)} < C \left\| f_k\left(t\right) \right\|_{L^1(\rho)},$$

где C - постоянная, не зависящая от k. Имеет место предельное соотношение

$$\left\| \varphi_{1k}^{+}\ \left(x + iy\right) - \varphi_{1k}^{-}\ \left(x - iy\right) - f_k\left(t\right) \right\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Применяя леммы 1, 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $a\left(t\right) \equiv 1.$ Тогда общее решение граничной задачи

$$\lim_{r \to 1-0} \left\| \varphi^{+}\left(x + iy\right) - \varphi^{-}\left(x - iy\right) - f\left(t\right) \right\|_{L^1_{(\rho)}} = 0$$

при условии (5) можно представить в виде $\varphi\left(z\right) = \varphi_0\left(z\right) + \varphi_1\left(z\right)$, где $\varphi_0\left(z\right)$ - общее решение однородной задачи (2), а φ_1 имеет вид

$$\varphi_1\left(z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{1k}\left(z\right).$$

5. Функцию $a\left(t\right)$ из (1) представим в виде $a\left(t\right) = S^{+}\left(t\right)\left(S^{-}\left(t\right)\right)^{-1}$ (см. [14]), где

$$S^{+}\left(z\right) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\left(\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{-\aleph} a\left(t\right)\right)}{t - z} dt \right), \qquad z \in D^{+},$$

$$S^{-}(z)=z^{-\aleph}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left(\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{-\aleph}a(t)\right)}{t-z}dt\right),\qquad z\in D^{-},$$

$\aleph = inda(t),\ t\in(-\infty,\infty).$

Теорема 4. Пусть выполняется условие (5). Справедливы следующие утверждения.

а) Если $\aleph \geq 0,$ то общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде

$$\varphi_0(z)=S(z)\left(P_{\aleph-1}(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-t_k}\right),$$

где $P_{\aleph-1}(z)$ - произвольный полином порядка $\aleph-1,$ а последовательность чисел $A_k, 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условию (2).

б) Если $\aleph < 0,$ то общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде

$$\varphi_0(z)=S(z)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-t_k}\right),$$

где числа $A_{1},\ A_{2},\ \ldots A_{\aleph}$ однозначно определяюся по числам $A_{\aleph+1},\ A_{\aleph+2},\ \ldots$.

Решение задачи (1) можно представить в виде $\varphi(z)=\varphi_0(z)+\varphi_1(z),$

где $\varphi_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{1k}(z),$

$$\varphi_{1k}(z)=\frac{1}{t_k-z}\frac{1}{2\pi i}\int_{T_k}\frac{f(t)(t_k-t)}{t-z}dt,$$

где $T_k=(t'_k,t'_{k+1}],\quad k=1,2,\ldots$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гахов Ф.Д**. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1977. – 640с.
2. **Мусхелишвили Н.И**. Сингулярные интегральные уравнения. –М.: Наука, 1968. – 512с.

3. **Хведелидзе Б.В.** Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной// Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики/ ВИНИТИ. – 1975. – Т. 7. – С. 5-162.
4. **Казарян К., Сориа Ф., Спитковский И**. Краевая задача Римана в пространствах с весом, допускающим особенности // ДАН России. – 1997. – Т. 357, №6. – С. 717-719.
5. **Айрапетян Г.М.** Разрывная задача Римана-Привалова со смещением в классе L^1 // Изв АН Арм. ССР. Математика. - 1990. – Т.25, №1.- С.3-20.
6. **Айрапетян Г.М., Бабаян В.А.** О задаче Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика. Физика. – 2011.- №17(112), вып. 24. – С.5-15.
7. **Айрапетян Г.М., Погосян Л.В.** Задача Римана в смысле слабой сходимости// Материалы Международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2011. – С. 32-35.
8. **Айрапетян Г.М., Погосян Л.В.** Граничная задача Римана-Гильберта для уравнения Бицадзе с граничным условием из пространства мер// Доклады НАН РА. – 2013.-Т.112. – С. 127-132.
9. **Айрапетян Г.М.** О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом// Мат. заметки.- 2004. – Т.76, №5. – С. 643-650.
10. **Hayrapetyan H.M.** On a boundary value problem with infinite index// Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis. Springer Proceedings in Math. And Stat. 291. – 2019. - P. 387-397.
11. **Hayrapetyan H.M.** Dirichlet problem in the half - plane for RO-varying weight functions// Topics in analysis and applications. NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. - Kluwer Academic Publishers, 2004.-Vol.147. – P. 311—316.

Հ.Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա.Դ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԱՆՎԵՐՋ ԻՆԴԵՔՍՈՎ ՄԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկվում է կշռային տարածությունում Ռիմանի եզրային խնդիրը վերին կիսահարթությունում միջին զուգամիտության իմաստով: Ենթադրվում է, որ կշռային ֆունկցիան զրո է դառնում հաշվելի թվով կետերում: Կշռային ֆուկցիայի զրոների բաշխման որոշակի պայմանների դեպքում ապացուցվում է, որ խնդիրը նորմալ լուծելի է $L^p\left(\rho\right)\left(1<p<\infty\right)$ տարածությունում: $p=1$ դեպքում ապացուցվում է, որ համասեռ խնդիրն ունի անվերջ քանակությամբ գծորեն անկախ լուծումներ:

Առանցքային բառեր. Ռիմանի խնդիր, կշռային տարածություն, միջին իմաստով զուգամիտություն, համասեռ խնդրի գծորեն անկախ լուծումներ:

H.M. HAYRAPETYAN, A.D. OHANYAN

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INFINITE INDEX IN THE HALF-PLANE

The Riemann boundary value problem in the weight space is considered in the upper half-plane in the mean convergence sense. It is supposed that the weight function has countable number of zeroes. Under some conditions of distribution of the weight function zeroes, the normal solvability of the problem in the spaces $L^p(\rho)(1<p<\infty)$ is proved. For $p=1$ it is proved that the homogeneous problem has an infinite number of linearly independent solutions.

***Keywords*:** Riemann problem, weight space, mean convergence, linearly independent solutions of the homogeneous problem.

ՀՏԴ 519.7/8

Ն.Վ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

ՇԵՄԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Հայտնի է, որ շեմային ֆունկցիաները նեյրոնների մաթեմատիկական մոդելներն են: Նրանք ուշագրավ են իրենց տեխնիկական իրականացման պարզությամբ: Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ամբողջ գործակիցներ և ազատ անդամ ունեցող գծային ձևերով շեմային ֆունկցիաների տրման բարդությունը, ինչպես նաև գծային ձևերի վրա կիրառվող գործողությունների բազմությունը, որոնք պահպանում են լայնության և կշռի փոքրագույն լինելու հատկությունը: Տարրական գծային ձևերի նկատմամբ նշված գործողությունների կիրառման միջոցով կարելի է կառուցել փոքրագույն լայնությամբ և կշռով գծային ձևերի անվերջ բազմություն: Այդ բազմության ենթաբազմությունը այնպիսի գծային ձևերի համախումբ է, որոնց կշռային գործակիցները Ֆիբոնաչիի թվերի կրկնապատիկներն են:

Առանցքային բառեր. շեմային ֆունկցիա, գծային ձև, փոքրագույն լայնություն, փոքրագույն կշիռ:

Հիմնական հասկացություններ: Բերենք գծային ձևի և շեմային ֆունկցիայի սահմանումները [1]:

Սահմանում 1: Գծային ձև կոչվում է հետևյալ ֆունկցիան՝

$$l_{\vec{\omega},\sigma}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i-\sigma,$$

որտեղ ω_i-երը $i=1,\dots,n$ և σ-ն իրական թվեր են, իսկ x_i-երը՝ $i=1,\dots,n$ փոփոխականներ, որոնք արժեքներ են ընդունում $E=\{0,1\}$ բազմությունից: