H.M. HAYRAPETYAN, A.D. OHANYAN

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INFINITE INDEX IN THE HALF-PLANE

The Riemann boundary value problem in the weight space is considered in the upper half-plane in the mean convergence sense. It is supposed that the weight function has countable number of zeroes. Under some conditions of distribution of the weight function zeroes, the normal solvability of the problem in the spaces $L^p(\rho)(1<p<\infty)$ is proved. For $p=1$ it is proved that the homogeneous problem has an infinite number of linearly independent solutions.

***Keywords*:** Riemann problem, weight space, mean convergence, linearly independent solutions of the homogeneous problem.

ՀՏԴ 519.7/8

Ն.Վ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

ՇԵՄԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Հայտնի է, որ շեմային ֆունկցիաները նեյրոնների մաթեմատիկական մոդելներն են: Նրանք ուշագրավ են իրենց տեխնիկական իրականացման պարզությամբ: Աշխատանքում ուսումնասիրվում է ամբողջ գործակիցներ և ազատ անդամ ունեցող գծային ձևերով շեմային ֆունկցիաների տրման բարդությունը, ինչպես նաև գծային ձևերի վրա կիրառվող գործողությունների բազմությունը, որոնք պահպանում են լայնության և կշռի փոքրագույն լինելու հատկությունը: Տարրական գծային ձևերի նկատմամբ նշված գործողությունների կիրառման միջոցով կարելի է կառուցել փոքրագույն լայնությամբ և կշռով գծային ձևերի անվերջ բազմություն: Այդ բազմության ենթաբազմությունը այնպիսի գծային ձևերի համախումբ է, որոնց կշռային գործակիցները Ֆիբոնաչիի թվերի կրկնապատիկներն են:

Առանցքային բառեր. շեմային ֆունկցիա, գծային ձև, փոքրագույն լայնություն, փոքրագույն կշիռ:

Հիմնական հասկացություններ: Բերենք գծային ձևի և շեմային ֆունկցիայի սահմանումները [1]:

Սահմանում 1: Գծային ձև կոչվում է հետևյալ ֆունկցիան՝

$$l_{\vec{\omega},\sigma}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i x_i-\sigma,$$

որտեղ ω_i-երը $i=1,\dots,n$ և σ-ն իրական թվեր են, իսկ x_i-երը՝ $i=1,\dots,n$ փոփոխականներ, որոնք արժեքներ են ընդունում $E=\{0,1\}$ բազմությունից:

$\omega_1, \dots, \omega_n$ թվերը կոչվում են համապատասխանաբար $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականների կշռային գործակիցներ, իսկ σ-ն՝ շեմ:

Սահմանում 2: $f(x_1, \dots, x_n) : E^n \to E$ բուլյան ֆունկցիան կոչվում է շեմային, եթե գոյություն ունի այնպիսի $l_{\vec{\omega},\sigma}(x_1, \dots, x_n)$ գծային ձև, երբ յուրաքանչյուր $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n$ հավաքի համար տեղի ունի հետևյալը.

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 1, \text{ եթե} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \alpha_i - \sigma \geq 0, \\ 0 \text{ ՝ հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Այդ դեպքում ասում են, որ $l_{\vec{\omega},\sigma}(x_1, \dots, x_n)$ գծային ձևն իրականացնում է $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան, և գրվում է հետևյալ ձևով.

$$l_{\vec{\omega},\sigma}(x_1, \dots, x_n) \to f(x_1, \dots, x_n) \text{ կամ } f_{\vec{\omega},\sigma}(x_1, \dots, x_n):$$

Բոլոր շեմային ֆունկցիաների բազմությունը նշանակենք RT-ով:

$f(x_1, \dots, x_n)$ շեմային ֆունկցիան կոչվում է Z-շեմային, եթե գոյություն ունի $l_{\vec{\omega},\sigma}(x_1, \dots, x_n)$ ամբողջ գործակիցներով և շեմով գծային ձև, որը իրականացնում է $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան: Z-շեմային ֆունկցիաների բազմությունը նշանակենք ZT-ով: [2] աշխատանքում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1: ZT և RT դասերը համընկնում են:

Ելնելով վերոնշյալ թեորեմից, կդիտարկենք միայն ամբողջ գործակիցներով և շեմով գծային ձևերը:

[3]-ում բերված են հետևյալ պարզագույն շեմային ֆունկցիաները.

1. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \; \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 1, \sigma = n$:
2. $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n \; \omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 1, \sigma = 1$:
3. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3 \; \omega_1 = \omega_2 = 1, \omega_3 = 2, \sigma = 2$:

Բերենք ոչ շեմային ֆունկցիայի օրինակ՝ $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$:

Ապացուցենք, որ այս ֆունկցիան շեմային չէ: Օգտվենք հակասող ենթադրությունից: Որպեսզի այն լինի շեմային, պետք է գոյություն ունենան այնպիսի $(\omega_1, \omega_2, \sigma)$ թվեր, որ տեղի ունենան հետևյալ պայմանները.

$$\begin{cases} \omega_1 \cdot 0 + \omega_2 \cdot 0 - \sigma < 0, \\ \omega_1 \cdot 0 + \omega_2 \cdot 1 - \sigma \geq 0, \\ \omega_1 \cdot 1 + \omega_2 \cdot 0 - \sigma \geq 0, \\ \omega_1 \cdot 1 + \omega_2 \cdot 1 - \sigma < 0: \end{cases}$$

Այս համակարգը լուծում չունի: Եկանք հակասության:

Կասենք, որ $l_{\vec{\omega},\sigma}$ գծային ձևը խիստ է իրականացնում $f(x_1, \dots, x_n)$ շեմային ֆունկցիան, եթե $l_{\vec{\omega},\sigma}$-ն իրականացնում է f ֆունկցիան, և $l_{\vec{\omega},\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$ յուրաքանչյուր $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n$: Դա նշանակվում է հետևյալ ձևով՝

$$l_{\vec{\omega},\sigma} \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n):$$

Բոլոր n փոփոխականի շեմային ֆունկցիաների բազմությունը նշանակենք T^n-ով: [2] աշխատանքում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 2: Եթե $f \in T^n$, ապա գոյություն ունի ամբողջ գործակիցներով և շեմով այնպիսի $l_{\vec{\omega},\sigma}$ գծային ձև, որ $l_{\vec{\omega},\sigma} \to f$:

Թեորեմ 3: Եթե $f \in T^n$, ապա գոյություն ունի ամբողջ գործակիցներով և շեմով այնպիսի $l_{\vec{\omega},\sigma}$ գծային ձև, որ $l_{\vec{\omega},\sigma} \Rightarrow f$:

<u>Ապացույց:</u> Ենթադրենք $l_{\vec{\omega},\sigma}(x_1, \dots, x_n)$ ամբողջ գործակիցներով և շեմով գծային ձևն իրականացնում է f շեմային ֆունկցիան: Այդ դեպքում բոլոր $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n$ հավաքների համար տեղի ունի՝

$$\begin{cases} l_{\vec{\omega},\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 0, \text{ եթե } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1, \\ l_{\vec{\omega},\sigma}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq -1, \text{ եթե } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0: \end{cases}$$

Դիտարկենք $l_{2\vec{\omega},2\sigma-1}(x_1, \dots, x_n)$ գծային ձևը: Ակնհայտ է, որ նշված գծային ձևը նույնպես իրականացնում է f ֆունկցիան, և բոլոր $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n$ հավաքների համար տեղի ունի՝

$$\begin{cases} l_{\overrightarrow{2\omega},2\sigma-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 1, \text{ եթե } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1, \\ l_{\overrightarrow{2\omega},2\sigma-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq -1, \text{ եթե } f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0: \end{cases}$$

Հետևաբար՝ $l_{2\vec{\omega},2\sigma-1}$ գծային ձևը խիստ է իրականացնում f ֆունկցիան:

Բերենք երկու փոփոխականի շեմային ֆունկցիաների օրինակներ, որոնք կօգտագործենք հետագայում:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2 = \begin{cases} 1, 2x_1 + 2x_2 - 3 > 0 \\ 0, 2x_1 + 2x_2 - 3 < 0 \end{cases}, f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 1, 2x_1 + 2x_2 - 1 > 0 \\ 0, 2x_1 + 2x_2 - 1 < 0 \end{cases}$$

Այսուհետ աշխատանքում կդիտարկենք միայն այնպիսի ամբողջ գործակիցներով և շեմով գծային ձևեր, որոնք խիստ են իրականացնում շեմային ֆունկցիաները:

Դիտարկենք գծային ձևերի բարդության հետևյալ չափերը.

$L(l_{\vec{\omega},\sigma}) = \max(|\omega_1|, \dots, |\omega_n|)\, , \mu(l_{\vec{\omega},\sigma}) = \sum_{i=1}^{n} |\omega_i|$:

Այժմ դիտարկենք f շեմային ֆունկցիային համապատասխան բարդության չափերը՝ $L(f) = \min_{l_{\vec{\omega},\sigma} \Rightarrow f} L(l_{\vec{\omega},\sigma})\, , \mu(f) = \min_{l_{\vec{\omega},\sigma} \Rightarrow f} \mu(l_{\vec{\omega},\sigma})$:

$L(f)$-ը կանվանենք f ֆունկցիայի լայնություն, իսկ $\mu(f)$-ը՝ կշիռ:

$l_{\vec{\omega},\sigma}$ գծային ձևը կանվանենք f շեմային ֆունկցիայի համար փոքրագույն լայնությամբ (կշռով) գծային ձև, եթե f ֆունկցիան խիստ իրականացնող բոլոր գծային ձևերի մեջ $l_{\vec{\omega},\sigma}$-ն ունի փոքրագույն լայնություն (կշիռ):

$f^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ֆունկցիան կոչվում է f-ի երկակի ֆունկցիա:

Բերենք հետևյալ թեորեմները, որոնք թույլ են տալիս ստեղծել փոքրագույն լայնություն (կշիռ) ունեցող գծային ձևեր:

Թեորեմ 4: Եթե $l_{\vec{\omega},\sigma}$-ն փոքրագույն լայնությամբ (կշռով) գծային ձև է f շեմային ֆունկցիայի համար, ապա f^*-ը շեմային է, և $l_{\vec{\omega},\sum_{i=1}^{n}\omega_i-\sigma}$ -ն նրա համար փոքրագույն լայնությամբ (կշռով) գծային ձև է:

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք տրված է $f \in T^n$ շեմային ֆունկցիա.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - \sigma > 0 \\ 0, \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - \sigma < 0 \end{cases}$$

Օգտվելով հետևյալ պարզ առնչությունից՝ $\overline{x_i} = 1 - x_i$, կստանանք.

$$f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} \omega_i (1 - x_i) - \sigma > 0 \\ 0, \sum_{i=1}^{n} \omega_i (1 - x_i) - \sigma < 0 \end{cases}:$$

Հետևաբար՝ $f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} \omega_i - \sigma) < 0 \\ 0, \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} \omega_i - \sigma) > 0 \end{cases}:$

Անցնելով երկակի ֆունկցիայի՝ ստանում ենք.

$$\bar{f}(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} \omega_i - \sigma) > 0 \\ 0, \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i - (\sum_{i=1}^{n} \omega_i - \sigma) < 0 \end{cases}:$$

Այսպիսով՝ $l_{\vec{\omega},\sum_{i=1}^{n}\omega_i-\sigma} \Longrightarrow f^*$: Թեորեմն ապացուցվեց:

Հետևանք 1: Եթե f –ը շեմային ֆունկցիա է, ապա $L(f) = L(f^*)$, և $\mu(f) = \mu(f^*)$:

<u>Ապացույց:</u> Ըստ թեորեմ 4-ի՝ f և f^* ֆունկցիաների փոքրագույն լայնությամբ և կշռով գծային ձևերի կշռային գործակիցները հավասար են: Հետևաբար՝ $L(f) = L(f^*)$, և $\mu(f) = \mu(f^*)$:

Թեորեմ 5: Եթե $l_{\vec{\omega},\sigma_n}$-ն $f \in T^n$ ֆունկցիայի համար փոքրագույն լայնությամբ (կշռով) գծային ձև է, և $f(\tilde{\alpha}) = 0$ որևէ $\tilde{\alpha} \in E^n$-ի համար (այսինքն f-ը նույնաբար մեկ չէ), ապա այն $f' \in T^{n+1}$ ֆունկցիայի համար, որ $f'(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$ և $f'(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1) = 1$ այն $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$-ի համար, որ $f(\tilde{\alpha}) = 0$, փոքրագույն լայնությամբ (կշռով) գծային ձև կլինի $l_{\vec{\omega}',\sigma_{n+1}}$-ն, որտեղ $\vec{\omega}' = (\omega_1, \dots, \omega_n, \omega'_{n+1})$: Այստեղ ω_i – երը, $i = \overline{1,n}$ որոշվում են $l_{\vec{\omega},\sigma_n}$ գծային ձևից, իսկ՝

$$\omega'_{n+1} = \max_{f(\tilde{\alpha})=0} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i + 2 - \min_{f(\tilde{\alpha})=0} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i \,, \sigma_{n+1} = \max_{f(\tilde{\alpha})=0} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i + 1:$$

<u>Ապացույց:</u> Դիցուք $f \in T^n$ և $f(\tilde{\alpha}) = 0$: Վերցնենք $f' \in T^{n+1}$ շեմային ֆունկցիան, որը բավարարում է թեորեմի պայմանները: Վերլուծենք f' ֆունկցիան՝ ըստ x_{n+1}-ի.

$$f'(x_1, \dots, x_{n+1}) = \bar{x}_{n+1} f'(x_1, \dots, x_n, 0) \vee x_{n+1} f'(x_1, \dots, x_n, 1):$$

Թեորեմի պայմաններից հետևում է, որ՝

$$f'(x_1, \dots, x_{n+1}) = \bar{x}_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) \vee x_{n+1} f'(x_1, \dots, x_n, 1): \quad (1)$$

Ենթադրենք $l_{\overrightarrow{\omega'}, \sigma_{n+1}}$ գծային ձևը, որտեղ $\overrightarrow{\omega'} = (\omega'_1, \dots, \omega'_n, \omega'_{n+1})$, իրականացնում է f' ֆունկցիան:

Ունենք՝

$$f'(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n+1} \omega'_i x_i - \sigma_{n+1} > 0 \\ 0, \sum_{i=1}^{n+1} \omega'_i x_i - \sigma_{n+1} < 0 \end{cases}: \quad (2)$$

Եթե $x_{n+1} = 0$, ապա ունենք՝

$$f'(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} \omega'_i x_i - \sigma_{n+1} > 0 \\ 0, \sum_{i=1}^{n} \omega'_i x_i - \sigma_{n+1} < 0 \end{cases}:$$

Քանի որ $l_{\overrightarrow{\omega}, \sigma_n}$-ն փոքրագույն լայնությամբ և կշռով գծային ձև է f ֆունկցիայի համար, ապա $\omega'_i = \omega_i \; i = \overline{1, n}$, և յուրաքանչյուր այնպիսի $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$-ի համար, որ $f(\tilde{\alpha}) = 0$, $\sigma_{n+1} \geq \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i + 1$: Քանի որ այս անհավասարումը տեղի ունի բոլոր այն $\tilde{\alpha}$-երի համար, որ $f(\tilde{\alpha}) = 0$, ապա՝

$$\sigma_{n+1} = \max_{f(\tilde{\alpha})=0} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i + 1: \quad (3)$$

Մյուս կողմից, եթե $f(\tilde{\alpha}) = 0$, և նույն $\tilde{\alpha}$-ի համար $f'(\tilde{\alpha}, 1) = 1$, ապա

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i + \omega'_{n+1} - \sigma_{n+1} > 0 \implies \omega'_{n+1} \geq \sigma_{n+1} + 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i: \quad (4)$$

Այսպիսով, (3)-ից կստանանք

$$\omega'_{n+1} \geq \max_{f(\tilde{\alpha})=0} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i + 2 - \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i: \quad (5)$$

Այս անհավասարումը տեղի ունի բոլոր այն $\tilde{\alpha}$-երի համար, որ $f(\tilde{\alpha}) = 0$, այսինքն

$$\omega'_{n+1} = \max_{f(\tilde{\alpha})=0} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i + 2 - \min_{f(\tilde{\alpha})=0} \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i: \qquad (6)$$

Թեորեմն ապացուցվեց:

Դիտողություն:

Քանի որ $f'(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$, ապա $\sigma_{n+1} < \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i=1}}^{n} \omega_i$ այն $\tilde{\alpha}$-երի համար, որտեղ $f(\tilde{\alpha}) = 1$:

Օգտագործենք այս թեորեմը բուլյան ֆունկցիաների որոշ հաջորդականության և նրանց համապատասխան փոքրագույն լայնությամբ և կշռով գծային ձևերի կառուցման համար:

Սկսենք մեկ փոփոխականի բուլյան ֆունկցիայից:

$$f_1(x_1) = x_1 = \begin{cases} 1, 2x_1 - 1 > 0 \\ 0, 2x_1 - 1 < 0 \end{cases}$$

Այսինքն $l_{2,1} \Longrightarrow f_1, \omega_1 = 2, \sigma_1 = 1$: Ունենք $f_1(0) = 0$:

Դիցուք $f_2(x_1, x_2) = \bar{x}_2 f_1(x_1) \vee x_2 f_2(x_1, 1)$ և $f_2(0,1) = 1$: Այդ դեպքում, քանի որ $\tilde{\alpha} = (\alpha_1)$, որտեղ $f_1(\alpha_1) = 0$ միայն զրոյական կետում, ապա (3) և (6) բանաձևերից կստանանք $\omega_2 = 2, \sigma_2 = 1$: Նկատենք, որ f_2 ֆունկցիայի սահմանումից ունենք $f_2(1, x_2) = 1$, այսինքն $f_2(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$: Շարունակելով նմանատիպ՝ կստանանք դիզյունկցիաների հաջորդականություն՝ $f_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$, որոնց համար փոքրագույն լայնությամբ և կշռով գծային ձևերն ունեն հետևյալ տեսքը՝ $l_{\vec{\omega},1}$, որտեղ $\vec{\omega} = (2, \dots, 2)$:

Դիտարկենք f_k շեմային ֆունկցիաների հաջորդականության մեկ այլ օրինակ, որոնք ստացվում են վերոնշյալ թեորեմով:

Դիտարկենք $f_1(x_1) = x_1$ ֆունկցիան: Ինչպես տեսանք նախորդ օրինակում, $l_{2,1} \Longrightarrow f_1$: Հետո դիտարկենք $g_2(x_1, x_2) = \bar{x}_2 f_1(x_1) \vee x_2 g_2(x_1, 1)$ և $f_2(x_1, x_2) = g_2^*(x_1, x_2)$ շեմային ֆունկցիաները: Նկատենք, որ $g_2(\tilde{\alpha}) = 0$ միայն $\tilde{\alpha} = (0,0)$ հավաքի դեպքում: Հետևաբար՝ ըստ թեորեմ 5-ի՝ g_2-ին համապատասխան գծային ձևի համար $\omega_2 = 2, \sigma'_2 = 1$, իսկ ըստ թեորեմ 4-ի՝ f_2-ի համար՝ $\omega_1 = \omega_2 = 2$ և $\sigma_2 = \sum_{i=1}^{2} \omega_2 - \sigma'_2 = 3$: Այսինքն $l_{2,2;3} \Longrightarrow f_2$:

Նշենք, որ $f_2(0,0) = f_2(1,0) = f_2(0,1) = 0$:

Այնուհետև դիտարկենք $g_3(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3 f_2(x_1, x_2) \vee x_3 g_3(x_1, x_2, 1)$ շեմային ֆունկցիան: g_3-ին համապատասխան գծային ձևի առաջին երկու գործակիցները 2 են, իսկ ըստ թեորեմ 5-ի՝ $\omega_3 = 4, \sigma'_3 = 3$: Անցնելով f_3 երկակի ֆունկցիային՝ նրա գործակիցները կստանանք 2,2,4 և $\sigma_3 = \sum_{i=1}^{3} \omega_2 - \sigma'_3 = 5$: Այսինքն $l_{2,2,4;5} \Longrightarrow f_3$:

Շարունակելով նմանատիպ՝ եթե հայտնի է $f_k(x_1, \dots, x_k)$ շեմային ֆունկցիան, կառուցում ենք f_{k+1} ֆունկցիան հետևյալ ձևով՝

$$g_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \bar{x}_{k+1} f_k(x_1, \dots, x_k) \vee x_{k+1} g_{k+1}(x_1, \dots, x_k, 1) \text{ և } f_{k+1} = g^*_{k+1}:$$

Ընդ որում, g_{k+1} ֆունկցիայի համար՝ $\omega_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i + 2$ և $\sigma'_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i + 1$, իսկ f_{k+1}-ի համար (քանի որ $f_k\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, 0\right) = 0$).

$$\omega_{k+1} = \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i + 2 \text{ և } \sigma_{k+1} = \omega_k + \omega_{k+1} - 1: \quad (7)$$

Դիտարկենք (7) հաջորդականությունը: Նշանակենք $2F_0 = 2$,

$2F_n = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i + 2$, երբ $n \geq 1$: Այդ դեպքում $\omega_k = 2F_{k+1} - 2F_k$: Հետևաբար՝ (7)-ի առաջին հավասարությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$2F_{k+1} - 2F_k = 2F_{k-1}, \text{ կամ } F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, F_0 = F_1 = 1: \quad (8)$$

(8) հաջորդականությունը Ֆիբոնաչիի թվային հաջորդականությունն է [4]:

Ընդ որում, $\sigma_k = 2F_{k+1} - 2F_k + 2F_k - 2F_{k-1} - 1 = 2F_k - 1$:

Այսպիսով, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ ֆունկցիաների համար համապատասխան փոքրագույն լայնությամբ (կշռով) գծային ձևերն ունեն հետևյալ տեսքը՝ $l_{\vec{\omega}, \sigma_k}$, որտեղ $\vec{\omega} = (2F_0, 2F_1, \dots, 2F_{k-1})$ և $\sigma_k = 2F_k - 1$:

Նկատենք, որ f_n ֆունկցիայի լայնությունը և կշիռը արտահայտվում են հետևյալ ձևով՝ $L(f_n) = 2F_{n-1}, \mu(f_n) = 2\sum_{i=0}^{n-1} F_i = 2F_{n+1} - 2$:

Հետևանք 2: Գոյություն ունի $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ այնպիսի շեմային ֆունկցիաների հաջորդականություն, որ f_i-ն i փոփոխական է, և $n \to \infty$ դեպքում տեղի ունի՝

$$L(f_n) \sim \frac{2\phi^n}{\sqrt{5}}, \mu(f_n) \sim \frac{2\phi^{n+2}}{\sqrt{5}} - 2, \text{ որտեղ } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}:$$

<u>Ապացույց:</u> Հայտնի է [4], որ Ֆիբոնաչիի թվերը ներկայացվում են հետևյալ բանաձևով՝ $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$:

Հաշվի առնելով, որ $n \to \infty$ դեպքում $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ -ն ձգտում է զրոյի, ստանում ենք $L(f_n) = 2F_{n-1} \sim \frac{2\phi^n}{\sqrt{5}}$: Երկրորդ գնահատականը ստացվում է համանման:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Соколов А.П.** Об одном многообразии пороговых функций // Интеллектуальные системы. – 2010 – Т. 14, вып. 1-4. – С. 433 - 442.
2. **Соколов А.П**. О конструктивной характеризации пороговых функций // Интеллектуальные системы. – 2008 – Т. 12, вып. 1-4. – С. 363-388.
3. **Բոզոյան Շ.Ե**. Բուլյան ֆունկցիաներ և թվային սխեմաների նկարագրության ALEX լեզուն: – Երևան, 2004. – էջ. 31-35:
4. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О**. Конкретная математика. – М.: Мир, 1998. – С.322-332.

Н.В. БАДАЛЯН

ПОРОГОВЫЕ ФУНКЦИИ

Известно, что пороговые функции представляют собой математические модели нейронов. Они представляют интерес в связи с простотой их технической реализации. В работе исследуется сложность задания пороговых функций алгебры логики линейными формами с целочисленными коэффициентами и свободным членом. Также изучается ряд воздействий на линейные формы, которые сохраняют наименьшую ширину и вес. Используя эти операции над элементарными линейными формами, можем построить бесконечный набор линейных форм с наименьшей шириной и весом. Подмножеством этой совокупности является набор линейных форм, весовые коэффициенты которых являются числами Фибоначчи.

Ключевые слова: пороговая функция, линейная форма, наименьшая ширина, наименьший вес.

N.V. BADALYAN

THRESHOLD FUNCTIONS

It is well known, that threshold functions are mathematical models of neurons. They are of interest due to the simplicity of their technical implementation. The work studies the complexity of setting threshold functions of algebra logic by linear forms with integer coefficients and a free member. A number of effects on linear shapes that retain the smallest width and weight are also investigated. By using these operations on elementary linear forms, we can construct an infinite set of linear forms with the smallest width and weight. A subset of this set is a set of linear forms whose weights are Fibonacci numbers.

Keywords: threshold function, linear shape, smallest width, smallest weight.