УДК 515.172.22

Р.В. ДАЛЛАКЯН

ОБ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ АХЕРНА

Приведены две теоремы о произведениях B_α $(-1<\alpha\le 0)$ Джрбашяна, которые в частном случае $\alpha = 0$, для произведений Бляшке, доказаны Ахерном.

Ключевые слова: произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, последовательность Ньюмана.

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $-1<\alpha<+\infty$ и последовательность $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ удовлетворяет α -условию Бляшке –Джрбашяна:

$$\sum_n \left(1-|a_n|\right)^{1+\alpha} < +\infty.$$

Произведением Джрбашяна называется следующее произведение:

$$B_\alpha\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_n\left(1-\frac{z}{z_n}\right)e^{-W_\alpha(z;a_n)},$$

где для $z\in$ D и $\zeta\in$ D имеем

$$\mathbf{W}_\alpha(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\overline{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k.$$

В [1] (см. стр. 625) показано, что в частном случае $\alpha = 0$ произведение Джрбашяна совпадает с произведением Бляшке:

$$B\left(z;\{a_n\}\right)=B_0\left(z;\{a_n\}\right)=\prod_n\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\frac{|a_n|}{a_n}.$$

В этой работе доказан аналог части одной теоремы Ахерна [2] для произведений Джрбашяна.

Теорема 1. Пусть $-1<\alpha\le 0$ и последовательность $\{a_n\}\subset\mathbb{D}$ такая, что $|a_n|\uparrow 1$. Тогда , если $1-|a_n|=O(q^n)$ для некоторого $q\in(0,1)$, то

$$\int_T |B'_\alpha(r\zeta)||d\zeta| = O\left(\ln\frac{1}{1-r}\right),\ r\to 1.$$

Доказательство. Как известно (см. [3], стр. 187),

$$|B'_\alpha(z,\{a_n\})| \le C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-|a_n|)^{1+\alpha}}{|1-\bar{a}_n z|^{2+\alpha}}.$$

Значит,

$$(1-r)^{1+\alpha}\int_T |B'_\alpha(r\zeta;\{a_n\})||d\zeta| \le C_1(1-r)^{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)^{1+\alpha}\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\zeta}{|1-\bar{a}_n re^{i\varphi}|^{1+\alpha}} \le$$

$$\le C_2(1-r)^{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-|a_n|)^{1+\alpha}}{(1-|a_n|r)^{1+\alpha}} = C_2(1-r)^{1+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|a_n|}{1-|a_n|+|a_n|(1-r)}\right)^{1+\alpha} \le$$

$$\le C_2(1-r)^{1+\alpha}\sum_{1-|a_n|\ge 1-r} 1 + C_3\cdot\sum_{1-|a_n|<1-r}(1-|a_n|)^{1+\alpha}.$$

Таким образом,

$$(1-r)^{1+\alpha}\int_T |B'_\alpha(r\zeta;\{a_n\})||d\zeta| \le C_2(1-r)^{1+\alpha}\sum_{1-|a_n|\ge 1-r} 1 + C_3\cdot\sum_{1-|a_n|<1-r}(1-|a_n|)^{1+\alpha}. \quad (1)$$

Теперь пусть $1-|a_n| \le C_4\cdot q^n$ для некоторого $q\in(0,1)$. Тогда из условия $1-|a_n|\ge 1-r$ следует, что $1-r\le C_4 q^n$. Следовательно, $n = O\left(\log\frac{1}{1-r}\right)$.
Значит,

$$(1-r)^{1+\alpha}\sum_{1-|a_n|\ge 1-r} 1 = O\left[(1-r)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-r}\right],\ r\to 1-. \quad (2)$$

Так как ряд $\sum(1-|a_n|)^{1+\alpha}$ сходится и $-1<\alpha\le 0$, то

$$C_3\sum_{1-|a_n|<1-r}(1-|a_n|)^{1+\alpha} < C_5\sum_{1-|a_n|<1-r}(1-|a_n|).$$

В работе [3] (стр. 330) доказано, что

$$C_5 \cdot \sum_{1-|a_n|<1-r} \left(1-|a_n|\right) = O\left[\left(1-r\right)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1-r}\right]. \tag{3}$$

Пользуясь (2) и (3), из (1) получаем

$$\left(1-r\right)^{1+\alpha} \int_T \left|B'_\alpha\left(r\zeta;\{a_n\}\right)\right| |d\zeta| = O\left[\left(1-r\right)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1-r}\right], r \to 1-.$$

Отсюда и следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание. В случае $\alpha = 0$ теорема доказана в [2].

Теорема 2. Пусть $-1 < \alpha \le 0$ и последовательность $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ такая, что $|a_n| \uparrow 1$. Тогда, если $1-|a_n| = O\left(q^n\right)$ для некоторого $q \in (0,1)$, то $\left|\hat{B}_\alpha(n)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. – М.: Наука, 1966. – 753с.
2. **Ahern P**. The mean modulus and the derivative of an inner function// Indiana Univ. - M. J. - 1979. – 28. -P. 311-348.
3. **Джрбашян М.М., Захарян В.С.** Классы и граничные свойства функций мероморфных в круге. – М.: Наука, 1993.- 358с.
4. **Даллакян Р.В.** Некоторые задачи о произведениях Джрбашяна// ДАН РА. – 2017. - Том 117, №1. - С.7-13.

Ռ. Վ. ԴԱԼԼԱՔՅԱՆ

ԱՀԵՐՆԻ ՄԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՆԱԼՈԳԻ ՄԱՍԻՆ

Ներկայացված է երկու թեորեմ Ջրբաշյանի B_α $\left(-1 < \alpha \le 0\right)$ արտադրյալների վերաբերյալ, որոնք $\alpha = 0$, այսինքն Բլյաշկեի արտադրյալների մասնավոր դեպքում ապացուցել է Ահերնը:

Առանցքային բառեր. Բլյաշկեի արտադրյալներ, Ջրբաշյանի արտադրյալներ, Նյումանի հաջորդականություններ:

R.V. DALLAKYAN

AN ANALOGUE OF ONE AHERN THEOREM

Two theorems on Djrbashyan products obtained by Ahern in the special case, for Blaschke products, are proved.

Keywords: Blaschke products, Djrbashyan products, Newman sequence.

UDC 517.13

A.A. GRIGORYANTS

THE MODEL OF HYPERRATIONAL NUMBERS WITH SELECTIVE ULTRAFILTER

In standard construction of hyperrational numbers using ultrapower, we assume that the ultrafilter is selective. This makes it possible to assign the real value to any finite hyperrational number. So, we can consider hyperrational numbers with selective ultrafilter as extension of real numbers field. The existence of strictly monotonic or stationary representing sequence for any hyperrational number is also proved.

Keywords: hyperrational number, selective ultrafilter, non-standard analysis, ultrapower.

Notation and definitions

We use standard set theoretic notation (see [3]). Let us give some well-known definition for convenience.

Partition of a set S is a pairwise disjoint family $\{S_i\}_{i\in I}$ of nonempty subsets such as $\bigcup_{i\in I} S_i = S$. We denote $\mathbb{N}$ as the set of natural numbers and $P[A]$ - the set of subsets of A.

Let $F \subset P[\mathbb{N}]$ be a non-principal ultrafilter on $\mathbb{N}$. We'll call the elements in F *big subsets* (relative to F) and the elements not in F - *small subsets* (relative to F).

F is called *selective ultrafilter* if for every partition $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ of $\mathbb{N}$ such as $S_n \notin F$ for all n (*small partition*), there exists $B \in F$ (*big selection*) such as $B \cap S_n$ is singleton for all $n \in \mathbb{N}$. Equivalently, F is selective if for every function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such as $f^{-1}(i)$ is small for every i, there exists a big subset B such as restriction $f|_B$ is injective.