Ա.Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆՑ

ՍԵԼԵԿՏԻՎ ՈՒԼՏՐԱՖԻԼՏՐՈՎ ՀԻՊԵՐՌԱՑԻՈՆԱԼ ԹՎԵՐԻ ՄՈԴԵԼԻ ՄԱՍԻՆ

Հիպերռացիոնալ թվերի ստանդարտ կառուցվածքում ուլտրաարտադրյալների միջոցով որպես հիմնական ուլտրաֆիլտր ընտրվում է սելեկտիվ ուլտրաֆիլտրը։ Դա հնարավորություն է տալիս յուրաքանչյուր (վերջավոր) հիպերռացիոնալ թվին համապատասխանեցնել իրական արժեք։ Այսպիսով, հիպերռացիոնալ թվերի դաշտը կարող ենք դիտարկել որպես իրական թվերի դաշտի լայնացում։ Ապացուցվում է նաև հիպերռացիոնալ թիվը ներկայացնող խիստ մոնոտոն կամ ստացիոնար հաջորդականության գոյությունը։

Առանցքային բառեր. հիպերռացիոնալ թիվ, սելեկտիվ ուլտրաֆիլտր, ոչ ստանդարտ անալիզ, ուլտրաարտադրյալ։

А.А. ГРИГОРЯНЦ

О МОДЕЛИ ГИПЕРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С СЕЛЕКТИВНЫМ УЛЬТРАФИЛЬТРОМ

В стандартной конструкции гиперрациональных чисел, как ультрапроизведений, в качестве основного ультрафильтра выбирается селективный ультрафильтр. Это позволяет сопоставить каждому (конечному) гиперрациональному числу вещественное значение. Таким образом, можем рассматривать поле гиперрациональных чисел как расширение поля действительных чисел. Также доказывается существование строго монотонной или стационарной последовательности, представляющей гиперрациональное число.

Ключевые слова: гиперрациональное число, селективный ультрафильтр, нестандартный анализ, ультрапроизведение.

УДК 515.172.22

П.А. МАТЕВОСЯН

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ОБ ОЦЕНКЕ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $H^p(\alpha)$

(Гюмри)

Исследуются некоторые свойства функций весового пространства $\mathrm{H}^p(\alpha)$ – голоморфных в единичном круге функций. Доказывается основная теорема об оценке тейлоровских коэффициентов этих функций.

Ключевые слова: пространства аналитических функций, оценка коэффициентов, единичный круг, голоморфные функции.

Пусть D - единичный круг комплексной плоскости. Классом Харди H^p $(0 < p < \infty)$ называют множество всех функций $f(z)$, голоморфных в единичном круге D и таких, что

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta}\right|^p d\theta\right\} < +\infty.$$

Символом H^∞ обозначают множество всех функций, голоморфных и ограниченных в D. Оценки коэффициентов тейлоровских разложений класса H^p изучены разными авторами $[1-5]$. В частности, получена оценка.

Если $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ принадлежит классу $H^p(0<p<1)$, то

$$|a_n| < [H^p(f)]^{\frac{1}{p}}(n+1)^{\frac{1}{p}-1}\ (n=0,1,2,\dots)\,, \tag{1}$$

где $H^p(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta}\right|^p d\theta$.

Следуя М.М. Джрбашяну [6,7], отнесем к классу $H^p(\alpha)$ $(p<0,\alpha>-1)$ все функции $f(z)$, голоморфные в единичном круге D, для которых существует интеграл

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^\alpha\left|f(re^{i\theta})\right|^p r dr d\theta.$$

Очевидно, что при $\alpha_1<\alpha_2$ класс $H^p(\alpha_1)$ содержится в классе $H^p(\alpha_2)$, а при $p_1<p_2$ класс $H^{p_2}(\alpha)$ содержится в классе $H^{p_1}(\alpha)$.

В работе [3] получена следующая оценка тейлоровских коэффициентов функций класса $H^p(\alpha)$ $(0<p<1,\alpha>-1)$. Если $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n \in$ $\in H^p(\alpha)\,,(0<p<1,\alpha>-1)$, то

$$|a_n| \le C(\alpha)(n+1)^{\frac{\alpha+2}{p}-1}, \tag{2}$$

где $C(\alpha)=\left[\frac{p^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} * H_\alpha^p(f)\right]^{\frac{1}{p}}$.

Целью настоящей статьи является доказательство того, что полученная оценка окончательная, т.е. ее невозможно улучшить. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема. Какова бы ни была функция $\varphi(n)>0$, монотонно стремящаяся к нулю, существует функция $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ такая, что:

1. $f(z)\in H^p(\alpha),(0<p<1,\alpha>-1)$.
2. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|a_n|}{(n+1)^{\frac{\alpha+2}{p}-1}\varphi(n)}=\infty$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим следующий многочлен:

$$P_{n,m}(z) = \left[\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} z^{n+1}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)z}\right]^m = \sum_{s=0}^{n*m} \alpha_s^{(n,m)} z^s.$$

Оценим снизу $\max\limits_{0\le s\le n*m} \alpha_s^{(n,m)}$. Все $\alpha_s^{(n,m)} > 0$, поэтому имеем

$$A_{n,m} = \max_{0\le s\le n*m} \alpha_s^{(n,m)} \ge \frac{1}{nm+1} P_{n,m}(1) \ge \frac{n^m}{nm+1} 2^{-m} \ge$$
$$\ge n^{m-1} \frac{2^{-m}}{m+1} = C(m) n^{m-1}, \tag{3}$$

где $P_{n,m}(1) = \sum_{s=0}^{n*m} \alpha_s^{(n,m)}$.

Оценим сверху $H_\alpha^p\left[P_{n,m}(z)\right]$ при $\frac{p}{\alpha+2} > \frac{1}{m}$. Имеем

$$H_\alpha^p\left[P_{n,m}(z)\right] \le \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_0^1 \int_0^\pi \left|P_{n,m}(re^{i\theta}\right|^p (1-r^2)^\alpha r dr d\theta.$$

Сначала оценим $\left|P_{n,m}(z)\right|$:

$$\left|P_{n,m}(z)\right|^p = \left|\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right) r e^{i\theta}}\right|^{mp} =$$

$$= \left|\frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} z^{n+1} \cos(n+1)\,\theta - i\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} r^{n+1} \sin(n+1)\theta}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right) r \cos\theta + i\left(1-\frac{1}{n}\right) r sin\theta}\right|^{mp} =$$

$$= \left[\frac{4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} r^{n+1} \sin^2\frac{n+1}{2}\theta + (1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} r^{n+1})^2}{4\left(1-\frac{1}{n}\right) r \sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1-r+\frac{r}{n}\right)^2}\right]^{\frac{mp}{2}}.$$

Следовательно,

$$H_\alpha^p\left[P_{n,m}(z)\right] \le$$

$$\le \frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1\int_0^\pi \frac{\left[4\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} r^{n+1}\sin^2\frac{n+1}{2}\theta + (1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} r^{n+1})^2\right]^{\frac{mp}{2}}}{\left[4\left(1-\frac{1}{n}\right) r\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1-r+\frac{r}{n}\right)^2\right]^{\frac{mp}{2}}} ** (1-r^2)^\alpha r dr d\theta \le$$

$$\le \frac{2(\alpha+1)2^{mp}}{\pi}\int_0^1 (1-r^2)^\alpha r dr \int_0^\pi \frac{d\theta}{[4\left(1-\frac{1}{n}\right) r\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1-r+\frac{r}{n}\right)^2]^{\frac{mp}{2}}} \le$$

$$\le \frac{2(\alpha+1)2^{mp}}{\pi}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-r^2)^\alpha r dr \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left[4\left(1-\frac{1}{n}\right) r\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1-r+\frac{r}{n}\right)^2\right]^{\frac{mp}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-r^2)^\alpha r dr \int_0^\pi \frac{d\theta}{\left[4\left(1-\frac{1}{n}\right) r\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1-r+\frac{r}{n}\right)^2\right]^{\frac{mp}{2}}}\right], \qquad (4)$$

т.е. $I = I_1 + I_2$.

Сначала оценим интеграл I_1:

$$I_1 = \frac{2(\alpha+1)2^{mp}}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-r^2)^\alpha r dr \int_0^\pi \frac{d\theta}{[4\left(1-\frac{1}{n}\right) r\sin^2\frac{\theta}{2} + (1-r+\frac{r}{n})^2]^{\frac{mp}{2}}} \le$$

$$\le \frac{2*2^{mp}(\alpha+1)}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-r^2)^\alpha r dr \int_0^\pi d\theta = \left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{\alpha+1}\right] * 2^{mp}.$$

Займемся теперь оценкой интеграла I_2. Для этого предварительно оценим внутренний интеграл, принимая $n \ge 2$. В результате имеем

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\left[4\left(1-\frac{1}{n}\right) r\sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1-r+\frac{r}{n}\right)^2\right]^{\frac{mp}{2}}} \le$$

$$\le \int_0^{1-r+\frac{r}{n}} \frac{d\theta}{\left(1-r+\frac{r}{n}\right)^{mp}} + \int_{1-r+\frac{r}{n}}^\pi \frac{d\theta}{\left[4\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right]^{\frac{mp}{2}}} \le$$

$$\le \frac{1}{\left(1-r+\frac{r}{n}\right)^{mp-1}} + \frac{\pi^{mp}}{(mp-1)\left(1-r+\frac{r}{n}\right)^{mp-1}} =$$

$$= \left(1+\frac{\pi^{mp}}{mp-1}\right) * \frac{1}{\left(1-r+\frac{r}{n}\right)^{mp-1}}.$$

Следовательно, для оценки второго интеграла (4) будем иметь

$$I_2 = \frac{2 * 2^{mp}(\alpha+1)}{\pi} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (1-r^2) r dr \int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\theta}{\left[4\left(1-\frac{1}{n}\right) r \sin^2\frac{\theta}{2} + \left(1-r+\frac{r}{n}\right)^2\right]^{\frac{mp}{2}}} \leq$$

$$\leq \frac{2^{mp+1}(\alpha+1)}{\pi}\left(1+\frac{\pi^{mp}}{mp-1}\right) \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-r^2) r dr}{\left(1-r+\frac{r}{n}\right)^{mp-1}} \leq$$

$$\leq \frac{2^{mp+\alpha+1}(\alpha+1)}{\pi}\left(1+\frac{\pi^{mp}}{mp-1}\right)\left[\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{n}{n+1}} \frac{(1-r)^{\alpha}}{(1-r)^{mp-1}} dr + \int\limits_{\frac{n}{n+1}}^{1} \frac{(1-r)^{\alpha} r dr}{\left(\frac{r}{n}\right)^{mp-1}}\right] \leq$$

$$\leq \frac{2^{mp+\alpha+1}(\alpha+1)}{\pi}\left(1+\frac{\pi^{mp}}{mp-1}\right) *$$

$$* \left[\frac{1}{mp-\alpha-2}(n+1)^{mp-\alpha-2} + \frac{1}{\alpha+1}(n+1)^{mp-\alpha-2}\right] =$$

$$= \frac{(mp-1+\pi^{mp})2^{mp+\alpha+1}}{\pi(mp-\alpha-2)}(n+1)^{mp-\alpha-2}.$$

Таким образом, окончательно получаем, что

$$H_{\alpha}^{p}\left[P_{n,m}(z)\right] \leq \frac{(mp-1+\pi^{mp})2^{mp+\alpha+1}}{\pi(mp-\alpha-2)}(n+1)^{mp-\alpha-2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{k^{\frac{2}{p}}(n_k+1)^{m-\frac{\alpha+2}{p}}} P_{n_k,m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (6)$$

Порядок роста последовательности $\{n_k\}$ уточним в дальнейшем. Покажем, что $f(z)$ принадлежит классу $H^p(\alpha)$. Для этого обе части равенства (6) умножим на $\frac{\alpha+1}{\pi}(1-r^2)^{\alpha} r$ и проинтегрируем в единичном круге D:

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-r^2)^{\alpha}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^{p} r dr d\theta =$$

$$= \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-r^2)^{\alpha} r \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2}{p}}(n_k+1)^{m-\frac{\alpha+2}{p}} * P_{n_k,m}(z)\right|^{p} dr d\theta \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(n_k+1)^{mp-\alpha-2}} * \frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}(1-r^2)^{\alpha} r \left|P_{n_k,m}(re^{i\theta})\right|^{p} dr d\theta \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(n_k+1)^{mp-\alpha-2}} H_{\alpha}^{p}\left[P_{n_k,m}(z)\right].$$

Используя оценку (5), окончательно получим

$$\frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta}\right|^p(1-r^2)^\alpha rdrd\theta \le \frac{\pi(mp-1+\pi^{mp})2^{mp+\alpha+1}}{6(mp-\alpha-2)} < +\infty\,.$$

Следовательно, $f(z)$ принадлежит классу $H^p(\alpha)$, а это означает, что $f(z)$ удовлетворяет условию (1).

Покажем, что имеет место условие теоремы (2). Для этого оценим снизу $max|a_n|$ при $n_k < n \le n_k(m+1)$. В силу (3) имеем

$$\max_{n_k<n\le n_k(m+1)}|a_n| \ge \frac{1}{k^{2/p}(n_k+1)^{m-\frac{\alpha+2}{p}}}A_{n_k,m} \ge \frac{C(m)n_k^{m-1}}{k^{2/p}(n_k+1)^{m-\frac{\alpha+2}{p}}} =$$

$$= \frac{C(m)n_k^{m-1}}{(n_k+1)^{m-1}k^{2/p}}(n_k+1)^{\frac{\alpha+2}{p}-1} = \frac{C(m)}{k^{2/p}}(n_k+1)^{\frac{\alpha+2}{p}-1}\,.$$

Отсюда следует, что если мы выберем $\{n_k\}$ так, чтобы $k^{2/p}\varphi(n_k) \to 0$, то будет удовлетворено и условие (2). Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Привалов И.И.** Граничные свойства аналитических функций. - М., Л.: ГТТН, 1950. -358с.
2. **Степанян С.С.** О наилучшей оценке тейлоровских коэффициентов функций класса М.М. Джрбашяна// ДАН АрмССР.-1982.-Том 35, No 3.-С. 107-113.
3. **Матевосян П.А.** Оценка тейлоровских коэффициентов в пространстве $H^p(\alpha)$ //Вестник НПУА: Сборник научных статей.- 2019.- Часть 1. - С. 28-31.
4. **Шамоян Ф.А.** Факторизационная теорема М.М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка // Изв. АН АрмССР. Сер. Мат. – 1978.-13, No 5-6. – С. 405-42.
5. **Оганесян И.В.** Некоторые дополнительные свойства функций класса М.М. Джрбашяна – Деп. в Арм. ННИНТИ. -1989.- 4.9, No 49-Ар.
6. **Джрбашян М.М.** О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций // ДАН АрмССР.-1945.-Т.3, No1.-С.3-29.
7. **Джрбашян М.М.** К проблеме представимости аналитических функций// Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР.-1948.-Вып.2.-С.3-55.

Պ.Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

$H^p(\alpha)$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԹԵՅԼՈՐՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ

Ուսումնասիրվում են $H^p(\alpha)$ կշռային տարածություններում հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ հատկություններ: Ապացուցվում է գործակիցների գնահատման համար հիմնական թեորեմը:

Առանցքային բառեր. անալիտիկ ֆունկցիաների տարածություն, գործակիցների գնահատում, միավոր շրջան, հոլոմորֆ ֆունկցիաներ:

P.A. MATEVOSYAN

THE PROOF OF THE MAIN THEOREM ON ESTIMATION OF THE TAYLOR COEFFICIENTS IN THE SPACE $H^p(\alpha)$

Some properties of holomorphic functions in the unit circle from the weighted space $H^p(\alpha)$ are studied. The main theorem on estimating the Taylor coefficients of such functions is proved.

Keywords: space of analytic functions, coefficient estimation, unit circle, holomorphic functions.

УДК 519.21 (072)

Р.Ш. НАГАПЕТЯН

ОДНО ПРЕДЕЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ В СИСТЕМЕ M/G/1 В РАЗНЫХ РЕЖИМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

(Капан)

В системе массового обслуживания M/G/1 с помощью предельной теоремы для полурегенерирующих процессов найдено предельное соотношение для совместного распределения некоторых важных случайных процессов, характеризующих функционирование системы в режимах TSH (time-sharing) и FGBG (foreground- background).

Ключевые слова: пуассоновское распределение, полурегенерирующий процесс, цепь Маркова, длина очереди, стационарное распределение.

Рассмотрим систему массового обслуживания M/G/1 с неограниченным числом мест ожидания. Заявка, заставшая в момент своего поступления систему свободной, сразу начинает обслуживаться. После окончания обслуживания этой заявки прибор приступает к обслуживанию всех накопившихся к этому времени заявок. И вообще, в момент окончания обслуживания пакета (группы)