Պ.Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

$H^p(\alpha)$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԹԵՅԼՈՐՅԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ԳՆԱՀԱՏՄԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՊԱՑՈՒՅՑԸ

Ուսումնասիրվում են $H^p(\alpha)$ կշռային տարածություններում հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ հատկություններ: Ապացուցվում է գործակիցների գնահատման համար հիմնական թեորեմը:

Առանցքային բառեր. անալիտիկ ֆունկցիաների տարածություն, գործակիցների գնահատում, միավոր շրջան, հոլոմորֆ ֆունկցիաներ:

P.A. MATEVOSYAN

THE PROOF OF THE MAIN THEOREM ON ESTIMATION OF THE TAYLOR COEFFICIENTS IN THE SPACE $H^p(\alpha)$

Some properties of holomorphic functions in the unit circle from the weighted space $H^p(\alpha)$ are studied. The main theorem on estimating the Taylor coefficients of such functions is proved.

Keywords: space of analytic functions, coefficient estimation, unit circle, holomorphic functions.

УДК 519.21 (072)

Р.Ш. НАГАПЕТЯН

ОДНО ПРЕДЕЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ В СИСТЕМЕ M/G/1 В РАЗНЫХ РЕЖИМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ

(Капан)

В системе массового обслуживания M/G/1 с помощью предельной теоремы для полурегенерирующих процессов найдено предельное соотношение для совместного распределения некоторых важных случайных процессов, характеризующих функционирование системы в режимах TSH (time-sharing) и FGBG (foreground- background).

Ключевые слова: пуассоновское распределение, полурегенерирующий процесс, цепь Маркова, длина очереди, стационарное распределение.

Рассмотрим систему массового обслуживания M/G/1 с неограниченным числом мест ожидания. Заявка, заставшая в момент своего поступления систему свободной, сразу начинает обслуживаться. После окончания обслуживания этой заявки прибор приступает к обслуживанию всех накопившихся к этому времени заявок. И вообще, в момент окончания обслуживания пакета (группы) заявок к обслуживанию принимаются все накопившиеся к этому времени заявки. Внутри пакета требования обслуживаются в одном из следующих режимов:

а) в режиме разделения времени (TSH).

Это означает следующее: если в рассматриваемый момент в пакете n заявок, то оставшееся время обслуживания одной заявки убывает со скоростью $\frac{1}{n}$;

б) переднем- заднем плане (FGBG).

Последнее означает (см. Клейнрок [1]): если поступившее требование застает систему свободной, то оно начинает обслуживаться со скоростью 1. Через некоторое время, например в момент t_1, поступает новое требование; тогда обслуживающий прибор прекращает обслуживание первого требования и переходит к обслуживанию второго требования со скоростью 1. Если в течение следующих t_1 единиц времени требований не поступает, то второе и первое требования получают в точности одно и то же количество обслуживания. После этого они будут обслуживаться в режиме разделения времени со скоростью $\frac{1}{2}$ каждое. Так будет продолжаться до тех пор, пока поступит новое требование, или пока обслуживание одного из двух требований будет закончено, и оно покинет систему. Работа выполняется таким образом, что к обслуживанию предъявляются все те требования, которые получили наименьшее обслуживание.

Введем обозначения характеристик, определяющих работу системы: λ –интенсивность входящего пуассоновского потока; B – функция распределения длительности обслуживания одной заявки.

Кроме того, пусть $\nu(t)$ – длина очереди в момент t; $\upsilon(x,t)$ - виртуальное время пребывания в системе заявки с временем обслуживания, равным x; $\zeta(t)$ – размер пакета, обслуживаемого в момент t, или, если система в момент t свободна, размер последнего пакета, обслуженного до момента t.

Введем в рассмотрение вложенную цепь Маркова $\zeta_n = \zeta(t_n)$, где t_n – момент начала обслуживания *n*-го пакета (ζ_n - размер *n*-го пакета).

Стандартными методами доказывается, что при $\rho = \lambda\beta_1 < 1$ существуют пределы $[2]$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\zeta_n = k\} = \pi_k,\ k \ge 1,$$

являющиеся решением системы

$$\pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij},\ \sum_i \pi_i = 1$$

и определяемые функциональным уравнением

$$\pi(z) = \pi(\beta(\lambda - \lambda z)) - (1 - z)\pi(\beta(\lambda)),\ \ \pi(1) = 1.$$

Здесь

$$\pi(z) = \sum_{k\ge 1} \pi_k z^k,\ |z| \le 1,\ \beta_1 = \int_0^\infty x dB(x),$$

$$\beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dB(x),$$

$$p_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} dB^{*i}(x) & \text{при } j > 1, \\ \int_0^\infty \left(\frac{\lambda x}{1!} e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \right) dB^{*i}(x) & \text{при } j = 1, \end{cases}$$

где * означает операцию свертки.

Двумерный процесс $\xi(t) = \{\nu(t), \nu(x,t)\}$ является регенерирующим с зависимыми циклами регенерации марковского типа (полурегенерирующим).

Цель работы - найти предел

$$\lim_{t\to\infty} P\{\nu(t) = j, \nu(x,t) < s, \zeta(t) = k \mid \zeta_0 = i_0\},$$

т.е. совместное распределение полумарковского процесса $\zeta(t)$ и дополнительной траектории $\xi(t) = \{\nu(t), \nu(x,t)\}$ в стационарном режиме.

Согласно предельной теореме для таких процессов [3], [4], для любого начального состояния i_0 имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi(t)\in \mathcal{B}, \zeta(t)=k/\zeta_0=i_0\} = a_k\int_0^\infty \mu_k(t,\mathcal{B})dt\ ,$$

где $\mathcal{B}$ – борелевское множество; $\zeta(t)$ - «вложенный» полумарковский процесс (в нашем случае $\mathcal{B}=\{j\}x(-\infty,s)$; $\zeta(t)$ – размер пакета, обслуживаемого в момент t);

$a_k = \dfrac{\pi_k}{\sum\limits_{i\geq 1}\pi_i w_i}$, величина w_i есть среднее время пребывания в состоянии i до перехода в следующее состояние, т.е.

$$w_i = i\beta_1 + \frac{1}{\lambda}\beta^i(\lambda),$$

$$\mu_k(t) = \mu_k(t,\mathcal{B}) = P\{\nu(t)=j, \upsilon(x,t)<s,\ z_1>t/\zeta_0=k\},\ k\geq 1,$$

$$z_n = t_n - t_{n-1},\ t_0 = 0,\ n = 1,2,\ldots.$$

Найдем $\mu_k(t)$ - задающую вероятностную характеристику дополнительной траектории $\xi(t)=\{\nu(t),\nu(x,t)\}$.

Назовем P - пакетом последний пакет, обслуживаемый до начала обслуживания виртуальной заявки. Будем вести отчет времени t с момента начала обслуживания P -пакета.

Пусть η - момент окончания обслуживания P -пакета; ξ - момент поступления первой заявки в [0,∞], т.е. имеет экспоненциальное распределение, $1-e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$; X_K - время, требуемое для обслуживания K-й поступившей заявки; u - задержка в обслуживании виртуальной x-заявки за счет обслуживания заявок в одном с ней пакете (по определению, x-заявка есть заявка со временем обслуживания, равным x≥0).

Тогда виртуальное время пребывания в системе x -заявки будет

$\upsilon(x,t) = x\cdot I_{\{\eta<t<\xi\}} + I_{\{t\leq\eta\}}\cdot(\eta - t + x + u)$, где I_A есть индикатор события A.

При этом задержка u для разных режимов имеет следующий вид:

1) TSH : $u = \sum\limits_{k=1}^{\nu(\eta)}\min(x_k, x);$

2) FGBG: $u = \sum_{k=1}^{\nu(\eta)} x_k \cdot I_{\{x_k < x\}}$ - суммарное время, необходимое для обслуживания заявок с требуемым временем обслуживания меньше x, поступивших за время η обслуживания P -пакета.

Отсюда для TSH и FGBG режимов вытекает следующая формула:

$$\mu_k(t) = 1_{\{x<s\}} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \cdot \sum_{i \ge 0} \int_0^{s-x} \int_t^{t+s-x-u} \frac{(\lambda(\eta - t))^i}{i!} e^{-\lambda(\eta-t)} dB^{*k}(\eta) dA_x^{*(i+j)}(u) +$$
$$+ 1_{\{x<s\}} \cdot 1_{\{j=0\}} e^{-\lambda t} B^{*k}(t),$$

где $A_x(u) = B(u) \cdot 1_{\{u \le x\}} + 1_{\{u > x\}}$ - для режима TSH и
$A_x(u) = (1 - B(x) + B(u)) \cdot 1_{\{u \le x\}} + 1_{\{u > x\}}$ - для режима FGBG.

Таким образом, в правой части предельного соотношения

$$\lim_{t \to \infty} P\{\nu(t) = j, \nu(x,t) < s, \xi(t) = k / \xi_0 = i_0\} = a_k \int_0^{\infty} \mu_k(t) dt$$

все известно.

Для применимости указанной предельной теоремы остается заметить, что циклы регенерации содержат абсолютно непрерывную компоненту, так как свободный период имеет экспоненциальное распределение, $1 - e^{-\lambda x}, \ x \ge 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Клейнрок Л.** Вычислительные системы с очередями. - М.: Мир, 1979.-600 с.
2. **Климов. Г.П.** Стохастические системы обслуживания. –М.: Наука, 1966. -243с.
3. **Сильвестров Д.С.** Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. –М.: Советское радио, 1980.-272с.
4. **Pyke R., Schaufele R**. Limit theorems for Markov renewal processes// Ann. Math. Stat. – 1964. -Vol. 35, N 4. – P. 1746-1764.

Ռ.Շ. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

ՄԻ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆ M/G/1 ՀԱՄԱԿԱՐԳՈՒՄ ՍՊԱՍԱՐԿՄԱՆ ՏԱՐԲԵՐ ՌԵԺԻՄՆԵՐՈՒՄ

Դիտարկվում է զանգվածային սպասարկման M/G/1 համակարգը (մեկ սպասարկող սարք,պահանջների պուասսոնյան հոսք, պահանջների սպասարկումը կամայական բաշխումով, սպասման անվերջ թվով տեղեր, պահանջների խմբային սպասարկում TSHI և FGBG սկզբունքներով): Այսպիսի համակարգը չի ենթարկվում մարկովյան նկարագրության, սակայն այն նկարագրվում է կիսավերականգնման պրոցեսով: Այդ պրոցեսների վերաբերյալ սահմանային թեորեմի միջոցով ստացված է համակարգի գործունեությունը բնութագրող մի քանի կարևոր պրոցեսների համատեղ բաշխումը կայունացված ռեժիմում:

Առանցքային բառեր. պուասսոնյան բաշխում, կիսավերականգնման պրոցես, Մարկովի շղթա, հերթի երկարություն, ստացիոնար բաշխում:

R.SH. NAHAPETYAN

A LIMIT RELATION IN THE SYSTEM M/G/1 IN DIFFERENT SERVICE MODES

In the queuing system M/G/1, using the limit theorem for semiregenerating processes, a relationship for the joint distribution of some important random processes characterizing the functioning of the system in the modes TSH (time-sharing) and FGBG (foreground- background) is found.

Keywords: Poisson distribution, semiregenerating processes, Markov chain, queue length, stationary distribution.