ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.52+511.52
DOI: 10.53297/18293336-2025.1-9

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА-ПЕНРОУЗА (II)

С.О. Симонян, А.Г. Аветисян, О.С. Абгарян

Национальный политехнический университет Армении

Предложены аналитические и численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза. Аналитические методы основаны на четвертом условии Мура-Пенроуза. Представлены три варианта аналитического решения. Первый вариант основан на комплексных разложениях заданной матрицы и ее обратной матрицы Мура-Пенроуза. Второй вариант основан на комбинации 1-го и 4-го условий Мура-Пенроуза. Третий вариант основан на комбинации 2-го и 4-го условий Мура-Пенроуза. В случае варианта аналитического решения 1, если любая из полученных итерационных процедур сходится, обратная матрица Мура-Пенроуза может быть определена с использованием соответствующих матричных блоков. В случае вариантов аналитического решения 2 и 3 полученные соотношения, очевидно, просты по сравнению с итеративными процедурами варианта 1, что приводит к прямому определению обратной матрицы Мура-Пенроуза. Численно-аналитические методы основаны на полученных аналитических соотношениях вариантов 2 и 3, а также используют дифференциальные преобразования Пухова в качестве основного математического аппарата.

Рассмотрен модельный пример с квадратной матрицей, для которого получено точное численно-аналитическое решение с использованием матричных дискретов. На основе этих дискретов восстановлены соответствующие матричные блоки и получена обратная матрица Мура-Пенроуза по ее комплексному разложению.

Ключевые слова: комплексная однопараметрическая обобщенная обратная матрица Мура-Пенроуза, аналитическое решение, дифференциальные преобразования, численно-аналитическое решение.

Введение. В работе [1] были предложены методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза $A^{+}(t)_{nxm}$ при недоопределенных матрицах $A(t)_{mxn}$, т.е. когда $m < n$, а в работе [2] - методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза $A^{+}(t)_{nxm}$ при переопределенных матрицах $A(t)_{mxn}$, т.е. когда $m > n$. При этих методах соответственно были использованы условия Мура-Пенроуза:

$$A(t) \cdot A^{+}(t) \cdot A(t) = A(t), \tag{1}$$

$$A^{+}(t) \cdot A(t) \cdot A^{+}(t) = A^{+}(t). \tag{2}$$

В работе [3] с той же целью было использовано условие Мура-Пенроуза:

$$[A(t) \cdot A^{+}(t)]^{*} = A(t) \cdot A^{+}(t). \tag{3}$$

В настоящей работе рассматриваются аналитические и численно-аналитические методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц, основанных на условии Мура-Пенроуза

$$[A^{+}(t) \cdot A(t)]^{*} = A^{+}(t) \cdot A(t). \tag{4}$$

Заметим, что в соотношениях (1)-(4) символ “+” - знак обобщенной обратной матрицы, а “*” - знак комплексного сопряжения. Заметим также, что при численно-аналитических методах основным математическим аппаратом выступают дифференциальные преобразования [4-6] Г.Е. Пухова.

Теперь допустим, что $A(t) \in C^{mxn}, A^{+}(t) \in C^{nxm}$ и имеют место разложения

$$A(t)_{mxn} = A_1(t)_{mxn} + j \cdot A_2(t)_{mxn}, \tag{5}$$

$$A^{+}(t)_{nxm} = X_1(t)_{nxm} + j \cdot X_2(t)_{nxm}. \tag{6}$$

Далее перейдем к соответствующим выкладкам.

I. Аналитические представления.

Первый вариант

С учетом разложений (5) и (6) из условия (4) получим комплексное матричное уравнение

$$\big[[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)]\big]^{*} = [X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)]$$

или

$$[X_1(t) \cdot A_1(t) - X_2(t) \cdot A_2(t)]^{T} - j \cdot [X_1(t) \cdot A_2(t) + X_2(t) \cdot A_1(t)]^{T} =$$
$$= [X_1(t) \cdot A_1(t) - X_2(t) \cdot A_2(t)] + j \cdot [X_2(t) \cdot A_1(t) + X_1(t) \cdot A_2(t)],$$

откуда порождается следующая матричная система второго порядка:

$$\begin{cases} A_1^{T}(t) \cdot X_1^{T}(t) - A_2^{T}(t) \cdot X_2^{T}(t) - X_1(t) \cdot A_1(t) + X_2(t) \cdot A_2(t) = 0, \\ A_2^{T}(t) \cdot X_1^{T}(t) + A_1^{T}(t) \cdot X_2^{T}(t) + X_1(t) \cdot A_2(t) + X_2(t) \cdot A_1(t) = 0. \end{cases}$$

Последнюю можно представить и в блочно-матричном виде:

$$\underset{nx2m}{[A_1^{T}(t) \mid A_2^{T}(t)]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c|c} X_1^{T}(t) & X_2^{T}(t) \\ \hline -X_2^{T}(t) & X_1^{T}(t) \end{array}\right]} = \underset{nx2m}{[X_1(t) \mid X_2(t)]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c|c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hline -A_2(t) & -A_1(t) \end{array}\right]}. \tag{7}$$

Следовательно, из (7) получим следующие итерационные процедуры:

а) $\underset{nx2m}{[X_1(t) \;\vdots\; X_2(t)]_{(q+1)}} = \underset{nx2m}{[A_1^T(t) \;\vdots\; A_2^T(t)]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]_{(q)}} \cdot \underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hdashline -A_2(t) & -A_1(t) \end{array}\right]^+}$, (8)

б) $\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]_{(q+1)}} = \underset{2mxn}{[A_1^T(t) \;\vdots\; A_2^T(t)]^+} \cdot \underset{nx2m}{[X_1(t) \;\vdots\; X_2(t)]_{(q)}} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1(t) & -A_2(t) \\ \hdashline -A_2(t) & -A_1(t) \end{array}\right]}$, (9)

где q – номер итераций. Естественно, при сходимости какой-либо из этих итерационных процедур в соответствии с (6) можно определить и обобщенную обратную матрицу $A^+(t)$, используя матричные блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

Второй вариант

Умножив соотношение (4) на матрицу $A(t)$ слева, получим

$$A(t) \cdot [A^+(t) \cdot A(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t),$$

а с учетом (1) – представление

$$A(t) \cdot [A^+(t) \cdot A(t)]^* = A(t). \tag{10}$$

Тогда соотношение (10) с учетом разложений (5) и (6) примет вид

$$[A_1(t) + j \cdot A_2(t)] \cdot \big[[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)]\big]^* = A_1(t) + j \cdot A_2(t)$$

или

$$[A_1(t) + j \cdot A_2(t)] \cdot \big[[A_1^T(t) \cdot X_1^T(t) - A_2^T(t) \cdot X_2^T(t)] - j \cdot [A_1^T(t) \cdot X_2^T(t) + A_2^T(t) \cdot X_1^T(t)]\big] =$$
$$= A_1(t) + j \cdot A_2(t),$$

откуда получим следующую матричную систему второго порядка:

$$\begin{cases} A_1(t) \cdot A_1^T(t) \cdot X_1^T(t) - A_1(t) \cdot A_2^T(t) \cdot X_2^T(t) + \\ +A_2(t) \cdot A_1^T(t) \cdot X_2^T(t) + A_2(t) \cdot A_2^T(t) \cdot X_1^T(t) = A_1(t), \\ A_2(t) \cdot A_1^T(t) \cdot X_1^T(t) - A_2(t) \cdot A_2^T(t) \cdot X_2^T(t) - \\ -A_1(t) \cdot A_1^T(t) \cdot X_2^T(t) - A_1(t) \cdot A_2^T(t) \cdot X_1^T(t) = A_2(t), \end{cases}$$

или

$$[A_1(t) \;\vdots\; A_2(t)] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) \cdot X_1^T(t) - A_2^T(t) \cdot X_2^T(t) & -A_1^T(t) \cdot X_2^T(t) - A_2^T(t) \cdot X_1^T(t) \\ \hdashline A_1^T(t) \cdot X_2^T(t) + A_2^T(t) \cdot X_1^T(t) & A_1^T(t) \cdot X_1^T(t) - A_2^T(t) \cdot X_2^T(t) \end{array}\right] =$$
$$= [A_1(t) \;\vdots\; A_2(t)],$$

$$[A_1(t) \;\vdots\; A_2(t)] \cdot \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right] = [A_1(t) \;\vdots\; A_2(t)],$$

или

$$\underset{mx2n}{[A_1(t) \;\vdots\; A_2(t)]} \cdot \left[\underset{2nx2n}{E} - \underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]}\right] = \underset{mx2n}{[0 \;\vdots\; 0]}.$$

С учетом того, что $A_1(t) \neq 0, A_2(t) \neq 0$, имеем

$$\underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2nx2n}{E}. \tag{11}$$

Следовательно, аналитическое решение примет вид

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]^+}, \quad (12)$$

откуда в соответствии с разложением (6) получим и обобщенную обратную матрицу $A^+(t)_{nxm}$, используя матричные блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

Третий вариант

Умножив соотношение (4) на матрицу $A^+(t)$ справа, получим

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^* \cdot A^+(t) = A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t),$$

а с учетом (2) – представление

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^* \cdot A^+(t) = A^+(t). \quad (13)$$

Тогда соотношение (13) с учетом разложений (5) и (6) примет вид

$$\big[[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)]\big]^* \cdot [X_1(t) + j \cdot X_2(t)] = [X_1(t) + j \cdot X_2(t)],$$

или, с учетом того, что $X(t) \neq 0, X_2(t) \neq 0$, имеем

$$\big[[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)]\big]^* - E = 0,$$

ибо $[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \neq [0]$. Следовательно,

$$[X_1(t) \cdot A_1(t) - X_2(t) \cdot A_2(t)]^T - j \cdot [X_2(t) \cdot A_1(t) + X_1(t) \cdot A_2(t)]^T = E,$$

откуда получим следующую матричную систему второго порядка:

$$\begin{cases} A_1^T(t) \cdot X_1^T(t) - A_2^T(t) \cdot X_2^T(t) = E, \\ A_1^T(t) \cdot X_2^T(t) + A_2^T(t) \cdot X_1^T(t) = 0. \end{cases}$$

Последнюю можно представить в виде

$$\text{а)} \quad \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right], \quad (14)$$

откуда

$$\underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c} X_1^T(t) \\ \hdashline X_2^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ \hdashline A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{array}\right]^+} \cdot \underset{2nxn}{\left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0 \end{array}\right]}, \quad (15)$$

или в виде

$$\text{б)} \quad \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} E & 0 \end{array}\right], \quad (16)$$

откуда

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ \hdashline -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{array}\right]} = \underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \end{array}\right]^+} \cdot \underset{nx2n}{\left[\begin{array}{c:c} E & 0 \end{array}\right]}. \quad (17)$$

Итак, имея матричные блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$, в соответствии с (6) можно определить и обобщенную обратную матрицу $A^+(t)_{nxm}$.

II. Численно-аналитические представления.

Первый вариант – представление условия (11)

Теперь воспользуемся одноточечными дифференциально-тейлоровскими преобразованиями [4-6]:

$$Z(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{d^K Z(t)}{dt^k}_{\mid t_\gamma \neq 0} \risingdotseq Z(t) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_\gamma}{H} \right)^K \cdot Z(K) \tag{18}$$

и переведем блочно-матричное представление (11) из области оригиналов в область дифференциальных изображений. Получим

$$\sum_{l=0}^{K} \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ \hdashline A_2^T(l) & A_1^T(l) \end{array}\right]} \cdot \underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(k-l) & -X_2^T(k-l) \\ \hdashline X_2^T(k-l) & X_1^T(k-l) \end{array}\right]} = \underset{2mx2m}{E \cdot \delta(K)}, \tag{19}$$

где $\delta(K)$ – тейлоровская единица [3], имеющая вид

$$\delta(K) = \begin{cases} 1, \text{если } K = 0, \\ 0, \text{если } K \neq 0. \end{cases} \tag{20}$$

С учетом (18) из (17) получим:

__при $K = 0$:__

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(0) & -X_2^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0) & X_1^T(0) \end{array}\right]} = \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{array}\right]^+} \cdot \underset{2nx2n}{E}; \tag{21}$$

__при $K = 1$:__

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(1) & -X_2^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1) & X_1^T(1) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(0) & -X_2^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0) & X_1^T(0) \end{array}\right] = [0],$$

откуда блочно-матричный дискрет:

$$\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(1) & -X_2^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1) & X_1^T(1) \end{array}\right]} = -\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{array}\right]^+} \cdot \underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1) \end{array}\right]} \cdot \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(0) & -X_2^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0) & X_1^T(0) \end{array}\right]}; \tag{22}$$

__при $K = 2$:__

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(2) & -X_2^T(2) \\ \hdashline X_2^T(2) & X_1^T(2) \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(1) & -X_2^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1) & X_1^T(1) \end{array}\right] +$$
$$+ \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(2) & -A_2^T(2) \\ \hdashline A_2^T(2) & A_1^T(2) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(0) & -X_2^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0) & X_1^T(0) \end{array}\right] = [0],$$

откуда блочно-матричный дискрет:

$$\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(2) & -X_2^T(2) \\ \hdashline X_2^T(2) & X_1^T(2) \end{array}\right]_{2mx2n} = -\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{array}\right]^+_{2mx2n} \cdot \left[\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1) \end{array}\right]_{2nx2m} \times\right.$$
$$\left. \times \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(1) & -X_2^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1) & X_1^T(1) \end{array}\right]_{2mx2n} + \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(2) & -A_2^T(2) \\ \hdashline A_2^T(2) & A_1^T(2) \end{array}\right]_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(0) & -X_2^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0) & X_1^T(0) \end{array}\right]_{2mx2n}\right]; \tag{23}$$

...

__при $K = K$:__

$$\sum_{l=0}^{K} \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ \hdashline A_2^T(l) & A_1^T(l) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(k-l) & -X_2^T(k-l) \\ \hdashline X_2^T(k-l) & X_1^T(k-l) \end{array}\right] = [0],$$

откуда блочно-матричный дискрет:

$$\left[\begin{array}{c:c} X_1^T(K) & -X_2^T(K) \\ \hdashline X_2^T(K) & X_1^T(K)\end{array}\right]_{2mx2n} = -\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]^{+}_{2mx2n} \times$$

$$\times\left[\sum_{l=1}^{K}\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ \hdashline A_2^T(l) & A_1^T(l)\end{array}\right]_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c:c} X_1^T(k-l) & -X_2^T(k-l) \\ \hdashline X_2^T(k-l) & X_1^T(k-l)\end{array}\right]_{2mx2n}\right]. \qquad (24)$$

Второй вариант – представление условия (14)

При этом будем иметь

$$\sum_{l=0}^{K}\underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ \hdashline A_2^T(l) & A_1^T(l)\end{array}\right]} \cdot \underset{2mxm}{\left[\begin{array}{c} X_1^T(k-l) \\ \hdashline X_2^T(k-l)\end{array}\right]} = \underset{2nxn}{\left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0\end{array}\right]} \cdot \delta(K). \qquad (25)$$

С учетом (20) из (25) получим:

при $K = 0$:

$$\underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c} X_1^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0)\end{array}\right]} = \underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]^{+}} \cdot \underset{2nxn}{\left[\begin{array}{c} E \\ \hdashline 0\end{array}\right]}; \qquad (26)$$

при $K = 1$:

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1)\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1)\end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline 0\end{array}\right],$$

откуда блочно-матричный дискрет:

$$\underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c} X_1^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1)\end{array}\right]} = -\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]^{+}} \cdot \underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1)\end{array}\right]} \cdot \underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c} X_1^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0)\end{array}\right]}; \qquad (27)$$

при $K = 2$:

$$\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(2) \\ \hdashline X_2^T(2)\end{array}\right] + \left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1)\end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1)\end{array}\right] +$$

$$+\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(2) & -A_2^T(2) \\ \hdashline A_2^T(2) & A_1^T(2)\end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0)\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline 0\end{array}\right],$$

откуда блочно-матричный дискрет:

$$\left[\begin{array}{c} X_1^T(2) \\ \hdashline X_2^T(2)\end{array}\right]_{2mxn} = -\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ \hdashline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]^{+}_{2mx2n} \cdot \left[\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(1) & -A_2^T(1) \\ \hdashline A_2^T(1) & A_1^T(1)\end{array}\right]_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(1) \\ \hdashline X_2^T(1)\end{array}\right]_{2mxn} +\right.$$

$$\left. +\left[\begin{array}{c:c} A_1^T(2) & -A_2^T(2) \\ \hdashline A_2^T(2) & A_1^T(2)\end{array}\right]_{2nx2m} \cdot \left[\begin{array}{c} X_1^T(0) \\ \hdashline X_2^T(0)\end{array}\right]_{2mxn}\right]; \qquad (28)$$

...

при $K = K$:

$$\sum_{l=0}^{K}\left[\begin{array}{c|c}A_1^T(l) & -A_2^T(l)\\ \hline A_2^T(l) & A_1^T(l)\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}X_1^T(k-l)\\ \hline X_2^T(k-l)\end{array}\right]=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

откуда блочно-матричный дискрет:

$$\underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c}X_1^T(K)\\ \hline X_2^T(K)\end{array}\right]}=-\underset{2mx2n}{\left[\begin{array}{c|c}A_1^T(0) & -A_2^T(0)\\ \hline A_2^T(0) & A_1^T(0)\end{array}\right]^{+}}\cdot\left[\sum_{l=1}^{K}\underset{2nx2m}{\left[\begin{array}{c|c}A_1^T(l) & -A_2^T(l)\\ \hline A_2^T(l) & A_1^T(l)\end{array}\right]}\cdot\underset{2mxn}{\left[\begin{array}{c}X_1^T(k-l)\\ \hline X_2^T(k-l)\end{array}\right]}\right]. \qquad (29)$$

Итак, имея блочно-матричные дискреты (21)-(29), с учетом правой части (18) или в соответствии с некоторым другим обратным дифференциальным преобразованием [4-6] можно восстановить блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$ или численно-аналитическое решение $A^+(t)$ согласно (6).

Очевидно, аналогичные вычислительные процедуры можно организовать и при использовании условия (16).

III. Модельный пример. Пусть имеется матрица [1, 2]:

$$A(t)=\begin{bmatrix}(1+jt) & jt\\ -jt & (1-jt)\end{bmatrix}.$$

Тогда при $t_\gamma=0$ имеем

$$A_1(0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, A_2(0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, A_1(1)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, A_2(1)=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}, \dots,$$

$$A_1(K)=A_2(K)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, K\geq 2.$$

1) Следовательно, в соответствии с (18):

при $K=0$:

$$\left[\begin{array}{c|c}X_1^T(0) & -X_2^T(0)\\ \hline X_2^T(0) & X_1^T(0)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]^{+}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right],$$

$$X_1(0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, X_2(0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix};$$

при $K=1$:

$$\left[\begin{array}{c|c}X_1^T(1) & X_2^T(1)\\ \hline X_2^T(1) & X_1^T(1)\end{array}\right]=-\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]^{+}\cdot\left[\begin{array}{cc|cc}0&0&-1&1\\0&0&-1&1\\ \hline 1&-1&0&0\\1&-1&0&0\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]=\cdots=$$

$$=\left[\begin{array}{cc|cc}0&0&1&-1\\0&0&1&-1\\ \hline -1&1&0&0\\-1&1&0&0\end{array}\right],\ X_1(1)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, X_2(1)=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix};$$

при $K=2$:

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1^T(2) & -X_2^T(2) \\ \hline X_2^T(2) & X_1^T(2) \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^+ \left[\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\right] = \cdots = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [0];$$

$$X_1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

…

<u>**при $K = K$:**</u>

$$X_1(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K \geq 3.$$

Итак, имеем решение

$$A^+(t) = \begin{bmatrix} (1 - jt) & -jt \\ jt & (1 + jt) \end{bmatrix},$$

что точно совпадает с решением, полученным в [1, 2].

2) Следовательно, в соответствии с (24):

<u>**при $K = 0$:**</u>

$$\left[\begin{array}{c} X_1^T(0) \\ \hline X_2^T(0) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^+ \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$X_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X_2(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

<u>**при $K = 1$:**</u>

$$\left[\begin{array}{c} X_1^T(1) \\ \hline X_2^T(1) \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^+ \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \cdots = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right],$$

$$X_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2(1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

<u>**при $K = 2$:**</u>

$$\left[\begin{array}{c} X_1^T(2) \\ \hline X_2^T(2) \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]^+ \left[\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] + \right.$$

$$+\left.\begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = \cdots = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

…

<u>при $K = K$:</u>

$$X_1(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ X_2(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, K \geq 3.$$

Очевидно, что и при этом получаем вышеприведенное точное решение.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе предложены аналитические, итерационные и численно-аналитические методы решения рассматриваемой задачи, основанные на условии Мура-Пенроуза (4). При численно-аналитических методах основным математическим аппаратом выступают дифференциальные преобразования, позволяющие получить простые рекуррентные вычислительные процедуры по определению однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза, достаточно часто используемых в различных научно-практических исследованиях.

Литература

1. **Симонян С.О., Чилингарян М.Г., Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) // Вестник НПУА. Сер. “Информационные технологии, электроника, радиотехника”. – 2023.- № 2.- С. 9 - 21. https://doi.org/10.53297/18293336-2023.2-9
2. **Симонян С.О., Чилингарян М.Г., Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Известия НАН РА и НПУА. Серия Технических наук. – 2023. – Том 76, № 4. – С. 514 - 524. https://doi.org/10.53297/0002306X-2023.v76.4-514
3. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Абгарян О.С.** К определению комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) // В печати
4. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1984.-419 с.
5. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований: Монография.- Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. – 361 с.
6. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц: Монография.- LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland, 2017. - 222 с.

Поступила в редакцию 31.03.2025.

Принята к опубликованию 10.07.2025.

ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒԶԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ (II)

Ս.Հ. Սիմոնյան, Ա.Գ. Ավետիսյան, Հ.Ս. Աբգարյան

Առաջարկվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ և թվա-անալիտիկ եղանակներ: Անալիտիկ եղանակները հիմնվել են Մուր-Պենրոուզի չորրորդ պայմանի վրա: Ներկայացվել է անալիտիկ լուծման երեք տարբերակ: 1-ին տարբերակը հիմնված է տվյալ մատրիցի և դրա Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի կոմպլեքս տարրալուծումների վրա: 2-րդ տարբերակը հիմնված է Մուր-Պենրոուզի 1-ին և 4-րդ պայմանների համակցության վրա: 3-րդ տարբերակը հիմնված է Մուր-Պենրոուզի 2-րդ և 4-րդ պայմանների համակցության վրա: Անալիտիկ լուծման 1-ին տարբերակի դեպքում, եթե ստացված իտերացիոն գործընթացներից որևէ մեկը զուգամիտում է, ապա Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցը կարող է որոշվել համապատասխան մատրիցային բլոկների միջոցով: Անալիտիկ լուծման 2-րդ և 3-րդ տարբերակների դեպքում ստացված արտահայտություններն ակնհայտորեն պարզ են՝ համեմատած 1-ին տարբերակի իտերատիվ ընթացակարգերի հետ, ինչը հանգեցնում է Մուր-Պենրոզի հակադարձ մատրիցի ուղղակի որոշմանը: Թվա-անալիտիկ մեթոդները հիմնված են 2-րդ և 3-րդ տարբերակներից ստացված անալիտիկ արտահայտությունների վրա, ինչպես նաև օգտագործում են Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունները՝ որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ:

Դիտարկվել է քառակուսի մատրիցով մոդելային օրինակ, որի համար ստացվել է ճշգրիտ թվային-անալիտիկ լուծում՝ մատրիցային դիսկրետների կիրառմամբ: Այս դիսկրետների հիման վրա վերականգնվել են համապատասխան մատրիցային բլոկները, և ստացվել է Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցը՝ ըստ դրա կոմպլեքս տարրալուծման:

Առանցքային բառեր. Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրից, անալիտիկ լուծում, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, թվա-անալիտիկ լուծում:

DETERMINING COMPLEX ONE-PARAMETER GENERALIZED INVERSE MOORE-PENROSE MATRICES (II)

S.H. Simonyan, A.G. Avetisyan, H.S. Abgaryan

Analytical and numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices are presented. Analytical methods are based on the 4th Moore-Penrose condition. Three options of the analytical solution are presented. The 1st option is based on complex decompositions of the given matrix and its Moore-Penrose inverse matrix. The 2nd option is based on a combination of the 1st and the 4th Moore-Penrose conditions. The 3rd option is based on a combination of the 2nd and the 4th Moore-Penrose conditions. In the case of analytical solution option 1, if any of the obtained iteration procedures converge, the Moore-Penrose inverse matrix can be determined using the corresponding matrix blocks. In the case of analytical solution options 2 and 3, the obtained relations are obviously simple compared to the iterative procedures of option 1, which leads to the direct determination of the Moore-Penrose inverse matrix. Numerical-analytical methods are based on the obtained analytical solution options 2 and 3, and use differential Pukhov transformations as a primary mathematical tool.

A model example with a square matrix is considered, for which a precise numerical-analytical solution is obtained using matrix discretes. Based on these discretes, the corresponding matrix blocks were restored and the Moore-Penrose inverse matrix was obtained according to its complex decomposition.

Keywords: complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrix, analytical solution, differential transformations, numerical-analytical solution.