УДК 514.01
DOI: 10.53297/18293336-2025.1-20

ЧИСЛОВОЙ ТЕТРАЭДР

Г.Ц. Акопян

Ереванский государственный университет

Каждому треугольнику соответствуют упорядоченные тройки неотрицательных действительных чисел – числовые треугольники, которые представляют длины его сторон. Числовой треугольник, где числа представлены в невозрастающем порядке, назван правильным. В статье рассматривается вопрос описания множества всех числовых треугольников в трехмерном евклидовом пространстве. Показывается, что геометрическим местом этого множества является "правильный бесконечный тетраэдр" с вершиной в начале координат и боковыми ребрами, совпадающими с тремя лучами, выходящими из этой вершины и проходящими, соответственно, через точки трехмерного единичного куба $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ и $(1, 1, 0)$. В этом тетраэдре боковые грани представляются "бесконечными треугольниками", образованными двумя ребрами, углы между которыми равны 60º. В статье такой тетраэдр назван числовым. Отмечено, что только точкам поверхности числового тетраэдра соответствуют вырожденные треугольники. Рассмотрены треугольные сечения числового тетраэдра, образованные плоскостями, пересекающими все ребра. Среди таких реберных сечений выделены основные, полученные плоскостями, перпендикулярными высоте тетраэдра, и представляемые правильными треугольниками, которые, в свою очередь, делятся высотами на шесть попарно равных стандартных прямоугольных треугольников. Один из них является правильным, и он представляет все правильные числовые треугольники. Рассмотрен луч из вершины числового тетраэдра, протыкающий правильный стандартный треугольник в конкретной точке, подобной числовому треугольнику этого правильного стандартного треугольника. Такая точка названа основной черной дырой стандартного треугольника, а проходящий через него луч назван основным черным лучом. Показано, что числовой тетраэдр имеет пучок из шести основных черных лучей. Поскольку любой луч числового тетраэдра протыкает все возможные реберные сечения, то отмечено, что числовой тетраэдр может иметь бесконечное континуальное множество таких пучков.

Ключевые слова: плоскость, треугольник, числовой треугольник, числовой тетраэдр, луч, сечение, черная дыра треугольника.

Введение. Одной из основных геометрических фигур является треугольник, имеющий довольно широкое применение почти во всех областях науки и техники: алгебре, геометрии, комбинаторной геометрии, тригонометрии, вычислительной геометрии, теории относительности, механике, электронике, физике, строительной инженерии и т.д. С точки зрения статического равновесия, треугольник является устойчивой фигурой и применяется при моделировании, построении и решении широкого круга разнообразных практических задач.

Постановка задачи. Каждому треугольнику соответствует тройка чисел, представляющих длины его сторон и удовлетворяющих всем свойствам расстояния [1]. Опишем в трехмерном евклидовом пространстве геометрическое место множества всех таких троек.

Результаты исследования. В настоящей статье мы будем рассматривать только те точки трехмерного евклидова пространства, для которых координатами являются неотрицательные действительные числа. Нами будут рассмотрены "бесконечные треугольные пирамиды" и, в частности, "бесконечные правильные тетраэдры" с вершиной в начале координат. Для краткости их будем называть "пирамидами" и "тетраэдрами". Будут рассмотрены также только лучи тетраэдра, выходящие из вершины.

Определение 1. Упорядоченную тройку (x, y, z) чисел назовем *числовым треугольником*, если существует треугольник, длины сторон которого равны этим числам.

Для таких чисел выполняются неравенства треугольника:

$$x \leq y + z\,, y \leq x + z\,, z \leq x + y\,.$$

Числовой треугольник назовем: *разносторонним* (если все его числа попарно различны); *равнобедренным* (два составляющих числа равны); *равносторонним* (все составляющие числа равны); *вырожденным* (хотя бы одно из этих чисел равно сумме двух остальных); *невырожденным* (он не является вырожденным); *правильным* (если $x \geq y \geq z$).

Количество числовых треугольников, соответствующих треугольнику, равно, соответственно, шести, если треугольник разносторонний; трем, если он равнобедренный, и одному, если он равносторонний [2]. Для каждого треугольника правильным является только одно из таких соответствий.

Теорема 1. Множеством числовых треугольников является правильный тетраэдр с вершиной O, являющейся началом координат, и ребрами r_1, r_2, r_3 – тремя лучами, проходящими, соответственно, через точки единичного трехмерного куба $e_1 = (0, 1, 1)$, $e_2 = (1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0)$.

Доказательство следует из того, что отмеченное множество является треугольной пирамидой, полученной пересечением полуплоскостей $x \leq y + z$, $y \leq x + z$, $z \leq x + y$ [2, 3]. Для боковых граней такой пирамиды угол при вершине равен 60º. Эта пирамида является правильным тетраэдром с ребрами r_1, r_2, r_3 и высотой h, являющейся лучом, проходящим через единичную точку (1, 1, 1). Грани этого тетраэдра образуются двумя ребрами, а апофемами являются соответствующие лучи-высоты h_{12}, h_{13} и h_{23} для граней, соответствующих ребрам $\{r_1, r_2\}$, $\{r_1, r_3\}$ и $\{r_2, r_3\}$. Рассмотренный тетраэдр назовем *числовым* и обозначим его через *T* (см. рис.).

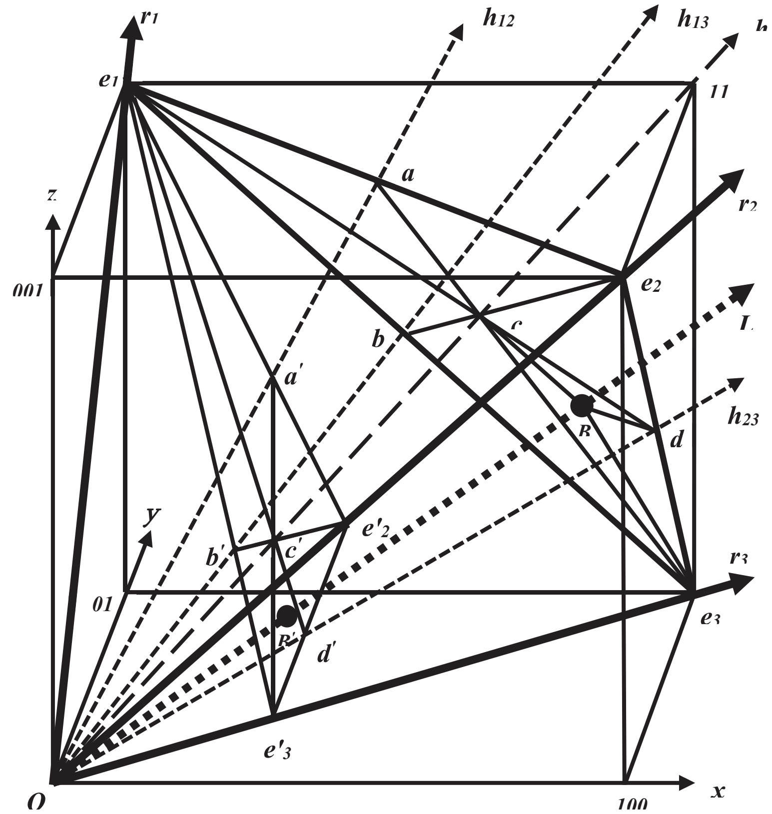

Рис. Числовой тетраэдр

Рассмотрим сечение числового тетраэдра плоскостью, при которой образуется треугольник – треугольное сечение. Таким является (*m*, *n*, *k*) – *реберное* сечение с плоскостью, пересекающей ребра r_1, r_2 и r_3 в точках, удаленных от вершины O, соответственно, на расстояние *m*, *n* и k. Реберным сечением является, например, сечение, перпендикулярное ребру и представляемое равнобедренным треугольником с углами φ, $90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, $90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, где $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Заметим, что не каждый треугольник может представлять реберное сечение. Среди реберных сечений выделим те, для которых $m = n = k$, и назовем их *основными сечениями.* Каждое основное сечение перпендикулярно высоте числового тетраэдра и является правильным треугольником, точками которого являются числовые треугольники, соответствующие треугольникам с одинаковым периметром. Например, на рисунке основным сечением (e_1, e_2, e_3) описываются треугольники с периметром 2. Высота h проходит через центр этого правильного треугольного сечения.

Кроме этих рассмотренных сечений, отметим также следующие сечения, которыми образуются неограниченные множества: сечение плоскостью, перпендикулярной грани; сечение, содержащее его апофему и противолежащее ребро; сечение, параллельное ребру; сечение, параллельное грани.

Отметим некоторые свойства точек числового тетраэдра.

1) Только точки поверхности являются вырожденными.
2) Точки высоты являются равносторонними, точки апофемных сечений – равнобедренными, а остальные – разносторонними.
3) Для числовых треугольников, сходящихся к ребру r_i, $i = 1,2,3$, i -е составляющее число стремится к нулю.
4) Для числовых треугольников, сходящихся, соответственно, к апофемам h_{12}, h_{23} и h_{13}, одно из составляющих чисел стремится к сумме двух остальных: $z \to x + y$, $y \to x + z$ и $x \to y + z$.
5) Любой луч числового тетраэдра протыкает все треугольные сечения.
6) Числовые треугольники одного и того же луча соответствуют подобным треугольникам.
7) Всем параллельным треугольным сечениям соответствуют подобные треугольники, а, в частности, основным – равносторонние.

Рассмотрим треугольные пирамиды P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, образованные, соответственно, пересечениями следующих пар полуплоскостей:

$$(x \geq y \text{ и } y \geq z), (x \geq z \text{ и } z \geq y), (y \geq x \text{ и } x \geq z),$$
$$(y \geq z \text{ и } z \geq x), (z \geq x \text{ и } x \geq y), (z \geq y \text{ и } y \geq x).$$

Через T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 обозначим тетраэдры, образованные, соответственно, пересечением числового тетраэдра T с этими пирамидами. Каждый из этих полученных тетраэдров, фактически, является 1/6 частью числового тетраэдра. Поскольку две грани этих тетраэдров имеют общее ребро h, назовем их *прямыми числовыми*. Таким образом, эти тетраэдры имеют общую вершину в начале координат O и одно общее ребро, совпадающее с h. Двумя другими являются ребра: h_{23} и r_3 для T_1, h_{23} и r_2 для T_2, h_{13} и r_3 для T_3, h_{13} и r_1 для T_4, h_{12} и r_2 для T_5, h_{12} и r_1 для T_6. Заметим, что две боковые грани этих тетраэдров перпендикулярны сечению, перпендикулярному ребру-высоте. Такие сечения являются стандартными прямоугольными треугольниками с углом 60º. Тетраэдр T_1 назовем *правильным числовым*, т.к. он содержит только правильные числовые треугольники.

Следствие 1. Каждый прямой числовой тетраэдр является треугольной пирамидой с вершиной O, одним из трех ребер которого является ребро h. Два других ребра являются: h_{23} и r_3 для T_1, h_{23} и r_2 для T_2, h_{13} и r_3 для T_3, h_{13} и r_1 для T_4, h_{12} и r_2 для T_5, h_{12} и r_1 для T_6.

Рассмотрим одно из основных сечений числового тетраэдра – равносторонний треугольник ($e_1\ e_2\ e_3$), которым описываются все числовые треугольники с периметром 2. Этот треугольник делится на 6 попарно равных составляющих прямоугольных треугольников ($c\ d\ e_3$), ($c\ d\ e_2$), ($c\ b\ e_3$), ($c\ b\ e_1$), ($c\ a\ e_2$), ($c\ a\ e_1$), где $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $b = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$, $c = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $d = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (см. рис.).

Сечение ($c\ d\ e_3$) является стандартным прямоугольным треугольником с углом 60° при вершине c, и ему соответствует правильный числовой треугольник $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6})$. Следующая система равенств:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 = y^2 + z^2 \\ x = 2z \end{cases}$$

имеет единственное решение $x_0 = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $y_0 = \sqrt{3} - 1$, $z_0 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$, которое представляется правильным числовым треугольником, расположенным в стандартном треугольнике ($c\ d\ e_3$).

Определение 2. Точку $B = (2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} - 1, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$, соответствующую правильному числовому треугольнику, назовем *основной черной точкой* (*дырой*) стандартного треугольника ($c\ d$ e$_3$).

Черная точка B в треугольнике ($c\ d\ e_3$) расположена от вершин c, d, e$_3$, соответственно, на расстояниях $\sqrt{\frac{4}{3}(7 - 4\sqrt{3})}$, $\sqrt{\frac{7}{6}(7 - 4\sqrt{3})}$, $\sqrt{\frac{2}{3}(16 - 9\sqrt{3})}$.

Определение 3. Луч, проходящий через основную черную точку, назовем *основным черным лучом* числового тетраэдра.

На рисунке представлен основной черный луч L, проходящий через основную черную точку B.

Лемма. Правильный числовой треугольник $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6})$ находится на основном черном луче L.

Доказательство следует из свойства 6 и равенства

$$(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} - 1, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) = (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}) \times \frac{2(3-\sqrt{3})}{\sqrt{6}}).$$

Из приведенных определений и леммы следует, что:

а) каждому треугольнику A соответствует правильный числовой треугольник (A);

б) правильному числовому треугольнику (A) соответствует луч L_A, проходящий через (A);

в) лучу L_A соответствует точка (A'), в которой он протыкает стандартный треугольник C;

г) стандартному треугольнику C соответствует числовой треугольник (C), расположенный на черном луче, проходящем через черную дыру этого же треугольника C.

Поскольку указанные соответствия носят однозначный характер, то изучение общих свойств всех треугольников в определенном смысле сводится к изучению черной дыры стандартного треугольника.

Заметим, что подобным треугольникам евклидова пространства соответствует одна и та же точка стандартного треугольника. В частном случае равносторонним треугольникам соответствует вершина с углом 60º, а вырожденным треугольникам – точки большого катета.

Следствие 2. Числовой тетраэдр содержит *пучок* из шести основных черных лучей.

Это утверждение следует из того, что треугольник ($e_1 e_2 e_3$) имеет шесть черных дыр, расположенных в составляющих стандартных треугольниках.

Можно показать также, что треугольники реберных сечений имеют шесть черных точек, и для каждого семейства параллельных реберных сечений числового тетраэдра существует свой пучок из шести черных лучей этого семейства. Отсюда следует, что числовой тетраэдр имеет бесконечное континуальное множество таких пучков.

На рисунке представлено также ($\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}$) – реберное сечение числового тетраэдра: сечение с плоскостью (e_1, e'_2, e'_3), где $e'_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $e'_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$.

Эта плоскость определяется уравнением $2x + y = 1$. Высота h и апофемы h_{12}, h_{13}, h_{23} тетраэдра протыкают эту плоскость, соответственно, в точках

$$c' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \text{ и } a' = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}),\ b' = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}),\ d' = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}).$$

Длины сторон ($c'\,e'_3$), ($c'\,d'$), ($d'\,e'_3$) треугольника ($c'\,d'\,e'_3$) равны, соответственно, числам $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{6}}{15}$, которые в этой же последовательности образуют правильный числовой треугольник. Луч L протыкает плоскость (e_1, e'_2, e'_3) в точке B' с координатами ($\frac{6-2\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}}, \frac{3\sqrt{3}-3}{9-\sqrt{3}}, \frac{3-\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}}$). Заметим, что точка B', не являясь черной для треугольного реберного сечения ($e_1\, e'_2\, e'_3$), становится черной для основного сечения числового тетраэдра, содержащего эту точку.

Заключение. Между треугольником и его трехмерным аналогом, которым является тетраэдр, имеется довольно обширный круг определенных как формальных, так и и содержательных общих свойств (см., например, [4 – 7]). Поскольку всем треугольникам соответствуют образующие числовой тетраэдр точки трехмерного евклидова пространства, то более углубленное изучение свойств такого тетраэдра поможет выявить детальные внутренние свойства треугольников. В частности, дальнейшие исследования свойств треугольных сечений числового тетраэдра помогут выявить новые свойства треугольников, которые будут иметь определенное применение при решении теоретических и практических задач.

Литература

1. **Шрейдер Ю.А.** Что такое расстояние? – М.: Физматгиз, 1963. – 76 с.
2. **Андерсон Д.А.** Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. – 960 с.
3. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Аналитическая геометрия. – М.: Физматгиз, 2006. – 224 с.
4. **Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.** Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974. – 384 с.
5. **Заславский А.А.** Сравнительная геометрия треугольника и тетраэдра // Матем. просв.- 2004.- Вып. 8.- С. 78–92.
6. **Матизен В., Дубровский В.** Из геометрии тетраэдра // Квант.- 1988.- № 9.- С. 66–71.
7. **Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.** Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

Поступила в редакцию 31.03.2025.
Принята к опубликованию 10.07.2025.

ԹՎԱՅԻՆ ՏԵՏՐԱԵԴՐ

Հ.Ց. Հակոբյան

Յուրաքանչյուր եռանկյանը համապատասխանում են ոչ բացասական իրական թվերից կազմված կարգավորված եռյակներ՝ թվային եռանկյուններ, որոնք ներկայացնում են նրա կողմերի երկարությունները: Թվային եռանկյունին, որի թվերը դասավորված են չաճող կարգով, կոչվում է ճիշտ: Հոդվածում դիտարկվում է բոլոր թվային եռանկյունների բազմության նկարագրման հարցը եռաչափ էվկլիդեսյան տարածությունում: Ցույց է տրվում, որ այդ բազմության երկրաչափական նկարագրություն է հանդիսանում «կանոնավոր անվերջ տետրաեդրը», որի գագաթը գտնվում է կոորդինատային սկզբնակետում, իսկ եզրային կողերը համընկնում են երեք ճառագայթների հետ, որոնք դուրս են գալիս այդ գագաթից և անցնում են համապատասխանաբար եռաչափ միավոր խորանարդի (0, 1, 1), (1, 0, 1) և (1, 1, 0) կետերով: Այս տետրաեդրում կողային նիստերը ներկայացվում են «անվերջ եռանկյուններով», որոնք ձևավորվում են երկու կողերով, որոնց միջև անկյունները 60^0 են: Հոդվածում այդ տետրաեդրը կոչվում է թվային տետրաեդր: Նշվում է, որ միայն թվային տետրաեդրի մակերևույթի կետերն են համապատասխանում վերածված եռանկյուններին: Դիտարկվում են թվային տետրաեդրի եռանկյուն հատույթները, որոնք առաջանում են բոլոր կողերը հատող հարթություններով: Այդ կողային հատույթներից առանձնացվում են հիմնականները, որոնք ստացվում են տետրաեդրի բարձրությանը ուղղահայաց հարթություններով և ներկայացվում են կանոնավոր եռանկյուններով: Վերջիններս իրենց հերթին բաժանվում են բարձրություններով վեց ստանդարտ իրար հավասար ուղղանկյուն եռանկյունների: Դրանցից մեկը ճիշտ եռանկյուն է և ներկայացնում է բոլոր ճիշտ թվային եռանկյունները: Դիտարկվում է թվային տետրաեդրի գագաթից դուրս եկող ճառագայթը, որը խոցում է ճիշտ ստանդարտ եռանկյունը որոշակի կետում, որը նման է տվյալ ճիշտ ստանդարտ եռանկյան թվային եռանկյանը: Այդ կետն անվանվում է ստանդարտ եռանկյան հիմնական սև խոռոչ, իսկ նրանով անցնող ճառագայթը՝ հիմնական սև ճառագայթ: Ցույց է տրվում, որ թվային տետրաեդրն ունի վեց հիմնական սև ճառագայթներից կազմված փունջ: Նշվում է, որ թվային տետրաեդրը կարող է ունենալ նմանատիպ խմբերի անվերջ կոնտինուալ բազմություն, քանի որ այդ տետրաեդրի ցանկացած ճառագայթ խոցում է բոլոր հնարավոր կողային հատույթները:

Առանցքային բառեր. հարթություն, եռանկյուն, թվային եռանկյուն, թվային տետրաեդր, ճառագայթ, հատույթ, եռանկյան սև խոռոչ:

NUMERICAL TETRAHEDRON

H.Ts. Hakobyan

Each triangle corresponds to an ordered triplet of non-negative real numbers – numerical triangles that represent the lengths of its sides. A numerical triangle in which the numbers are arranged in a non-increasing order is called a proper triangle. This article examines the description of the set of all numerical triangles in three-dimensional Euclidean space. It is shown that the geometric location of this set is a "proper infinite tetrahedron" with a vertex at the origin and lateral edges coinciding with three rays emanating from this vertex and passing through the points of the three-dimensional unit cube (0, 1, 1), (1, 0, 1) and (1, 1, 0) respectively. In this tetrahedron, the lateral faces are represented by "infinite triangles" formed by two edges with angles between them equal to 60º. In the article, such a tetrahedron is referred to as a numerical tetrahedron. It is noted, that only the points on the surface of the numerical tetrahedron correspond to degenerate triangles. Triangular cross-sections of a numerical tetrahedron formed by planes intersecting all edges are considered. Among these edge cross-sections, the primary ones are distinguished, which are obtained by planes perpendicular to the height of the tetrahedron, and are represented by equilateral triangles. These equilateral triangles, in turn, are divided by their heights into six standard pairwise equal right triangles. One of them is equilateral, and represents all proper numerical triangles. A ray from the vertex of the numerical tetrahedron is considered, piercing the equilateral standard triangle at a specific point similar to the numerical triangle of this equilateral standard triangle. This point is called the primary black hole of the standard triangle, and the ray passing through it is called the primary black ray. It is shown that the numerical tetrahedron has a bundle of six primary black rays. Since any ray of the numerical tetrahedron pierces all possible edge cross-sections, it is noted that the numerical tetrahedron can have an infinite continuous set of such bundles.

***Keywords*:** plane, triangle, numerical triangle, numerical tetrahedron, ray, cross-section, black hole of a triangle.