

UDC 621.52+511.52

DOI: 10.53297/18293336-2025.2-9

**A COMPARATIVE ANALYSIS OF DECOMPOSITION METHODS FOR
DETERMINING COMPLEX ONE-PARAMETER GENERALIZED
INVERSE MOORE-PENROSE MATRICES**

S.H. Simonyan, H.S. Abgaryan, M.G. Khachatryan

National Polytechnic University of Armenia

A comparative analysis of software implementations of the numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices is presented in order to reveal their computational characteristics. The numerical-analytical methods are based on previously developed analytical relations based on the 4 Moore-Penrose conditions, and also use differential Pukhov transformations as the main mathematical apparatus. Based on the mentioned computational methods, an application software package has been developed using modern means of information technologies, in particular, the Python programming language, the math module, NumPy, SymPy and PyQt libraries.

For each method the software implementations of numerical-analytical methods are compared by the dependence of the execution time on the number of matrix discretizes, by the dependence of the execution time on the size of the input matrix, by the dependence of the memory used on the number of matrix discretizes, by the dependence of the memory used on the size of the input matrix. It is shown that as the number of matrix discretizes increases, the accuracy of determining the generalized inverse matrix increases, but more computational resources are consumed, in particular, the execution time and memory used by each method increases. In addition, the software implementation of numerical-analytical methods developed based on the 3rd and 4th Moore-Penrose conditions requires less time and a smaller amount of memory than the software implementation of numerical-analytical methods developed based on the 1st and 2nd Moore-Penrose conditions.

Keywords: complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrix, differential transformations, numerical-analytical methods, application software package, computational characteristics.

Introduction. One-parameter matrices, their inverse and generalized inverse matrices are quite often encountered in various scientific research and applied

problems, in particular, when solving differential equations with variable coefficients, in boundary value problems, when solving systems of functional equations, when using stochastic matrices and Markov chains, in cases of studying the behavior of dynamic systems, when solving various problems of control systems, in cases of studying parametric problems of linear programming, etc.

In [1 - 4], analytical and numerical-analytical methods for determining complex one-parameter generalized inverse matrices of Moore-Penrose are proposed and implemented based on the 1st and 2nd Moore-Penrose conditions. In [5, 6], analytical and numerical-analytical methods for determining complex one-parameter generalized inverse matrices of Moore-Penrose are proposed and implemented based on the 3rd Moore-Penrose condition, and in [7, 8], based on the 4th Moore-Penrose condition [9]:

$$A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t) = A(t), \quad (1)$$

$$A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^+(t), \quad (2)$$

$$[A(t) \cdot A^+(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t), \quad (3)$$

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^* = A^+(t) \cdot A(t). \quad (4)$$

In the mentioned numerical-analytical methods, the differential transformations of Acad. NAS of Ukraine, Doctor of Technical Sciences, Professor G.E. Pukhov serve as the main mathematical apparatus [10].

Based on these methods [11] and using modern information technology tools, the application software package was developed which is presented in [12]. The software package is implemented in the Windows operating system using the Python programming language. The math module is used to perform mathematical operations. The NumPy library is used to work with numerical matrices, and the SymPy library is used for symbolic calculations. The graphical user interface of the package is created using the PyQt library.

This paper presents a comparative analysis of the numerical-analytical methods of the developed application software package with the aim of revealing their computational characteristics. The presented graphs are obtained on matrices such as:

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} (1 + jt) & jt \\ -jt & (1 - jt) \end{bmatrix};$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} t - 1 + j(t^2 + 1) & t^2 & -5t + j(3t - 2) \\ jt & t + 1 + 5j & -2tj \end{bmatrix};$$

$$A_3(t) = \begin{bmatrix} t & jt & t^2 \\ j & t+j & -t \\ 1/t & j/t & t-j \end{bmatrix}$$

etc.

Dependence of the execution time on the number of matrix discretises. Consider the dependence of the execution time of the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (1) – (4) on the number of matrix discretises (Fig. 1), for values $K = \overline{3,10}$ and averaged over the input matrix sizes (2×2 ; 2×3 ; etc).

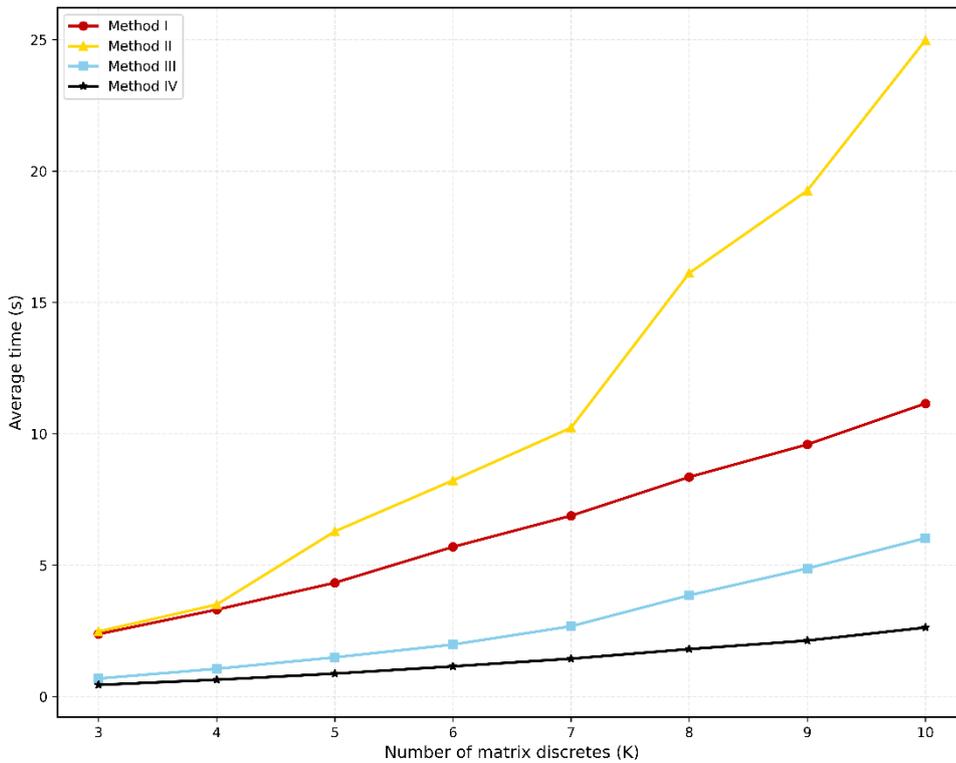


Fig. 1. Dependence of the execution time on the number of matrix discretises

The graph shows that as the parameter K takes on large values, the execution time increases, which is expected since more iterations are performed. In addition, the execution time of the numerical-analytical methods for Moore-Penrose conditions (3) and (4) is less compared to the execution time of the numerical-analytical methods for Moore-Penrose conditions (1) and (2) (which should have been the case).

Dependence of the execution time on the input matrix size. Consider the dependence of the execution time of the numerical-analytical methods of the

Moore-Penrose conditions (1) – (4) on the input matrix size (Fig. 2), averaged over the increase in the number of matrix discretizes K (3, 4, ..., 10).

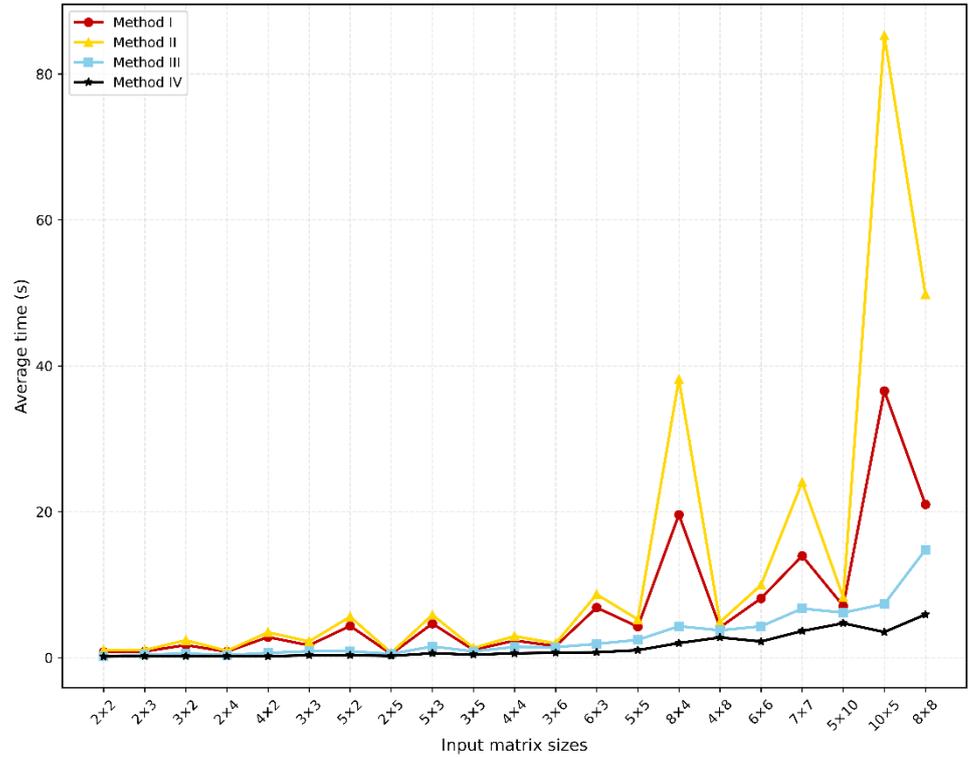


Fig. 2. Dependence of the execution time on the input matrix size

The graph shows that in the case of overdetermined matrices (when $m > n$), a longer execution time is required compared to the corresponding underdetermined matrices, since from a programming perspective, working with a large number of row vectors requires more time than working with a small number of row vectors.

On the other hand, the execution time of the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (3) and (4) is less than the execution time of the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (1) and (2).

Dependence of the used memory on the number of matrix discretizes. Consider the dependence of the memory used by the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (1) – (4) on the number of matrix discretizes (Fig. 3), for values $K = \overline{3,10}$ and averaged over the input matrix sizes (2×2 ; 2×3 ; etc).

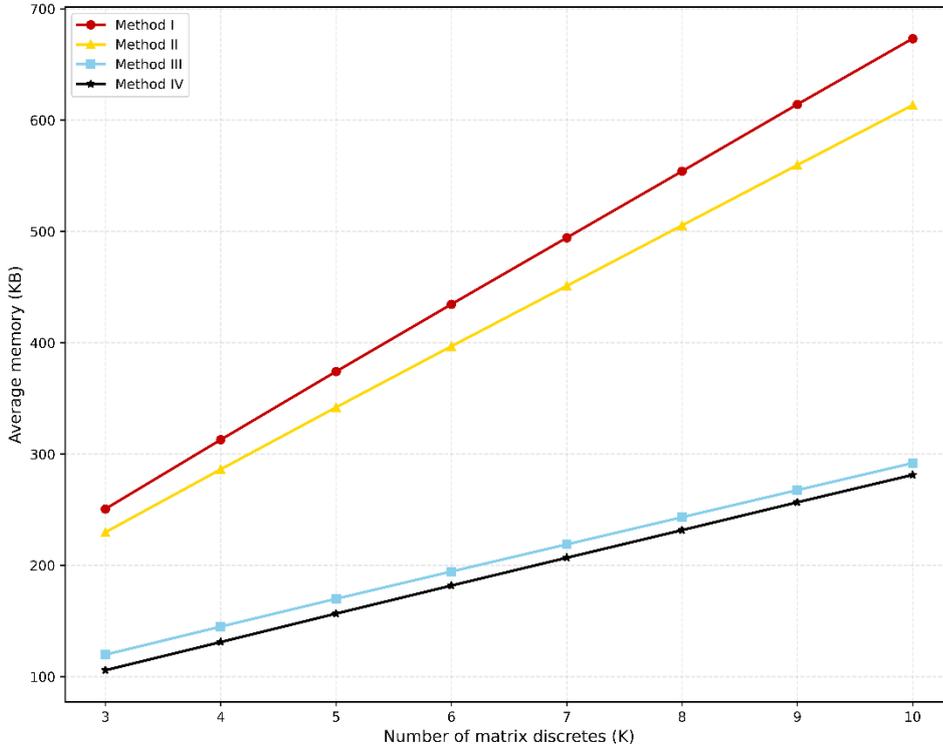


Fig. 3. Dependence of the used memory on the number of matrix discretions

As parameter K increases, the amount of memory used also increases approximately linearly, since the K matrix discretions are created during calculations.

It is obvious that the numerical-analytical methods of Moore-Penrose conditions (3) and (4) use less memory compared to the numerical-analytical methods of Moore-Penrose conditions (1) and (2).

Dependence of the used memory on the input matrix size. Consider the dependence of the memory used by the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (1) – (4) on the input matrix size (Fig. 4), averaged over the increase in the number of matrix discretions K (3, 4, ..., 10).

The graph shows that in the case of overdetermined matrices (when $m > n$), a larger amount of memory is used compared to the corresponding underdetermined matrices, since from a programming perspective, working with a large number of row vectors requires more memory than working with a small number of row vectors.

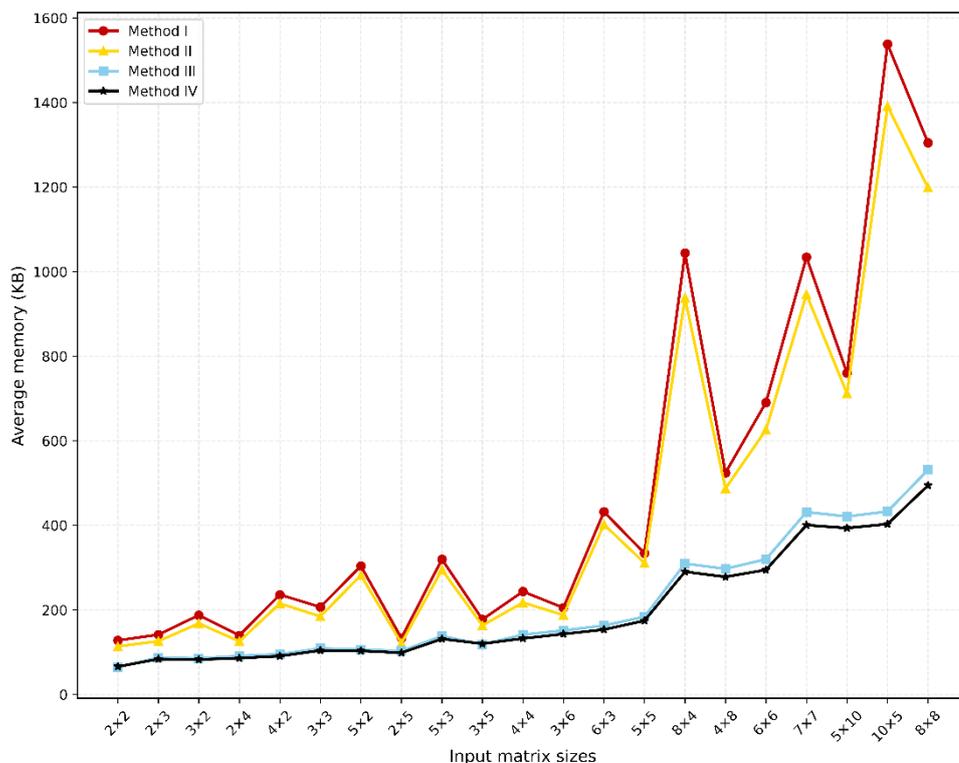


Fig. 4. Dependence of the used memory on the input matrix size

In this case too, the memory used by the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (3) and (4) is less than the memory used by the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (1) and (2).

Conclusion. This paper presents a comparative analysis of software implementations of the numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices in terms of execution time and memory usage. It is shown that software implementations of the numerical-analytical methods of the Moore-Penrose conditions (3) and (4) require fewer computational resources than the numerical-analytic methods of the Moore-Penrose conditions (1) and (2).

References

1. Симонян С.О., Чилингарян М.Г., Абгарян О.С. Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2023. - № 2. – С. 9 - 21.

<https://doi.org/10.53297/18293336-2023.2-9>

2. **Simonyan S.H., Melikyan A.V., Abgaryan H.S.** Software implementation of decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices (I) // Proceedings of NPUA: Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2024. - № 1. – P. 9 – 19. <https://doi.org/10.53297/18293336-2024.1-9>
3. **Симонян С.О., Чилингарян М.Г., Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Известия НАН РА и НПУА. Серия технических наук. – 2023. – Том 76, № 4. – С. 514 - 524. <https://doi.org/10.53297/0002306X-2023.v76.4-514>
4. **Simonyan S.H., Melikyan A.V., Abgaryan H.S.** Software implementation of decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices (II) // Proceedings of NPUA: Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2024. - № 2. – P. 24 – 34. <https://doi.org/10.53297/18293336-2024.2-24>
5. **Simonyan S.H., Abgaryan H.S., Avetisyan A.G.** Definition of Complex One-Parameter Generalized Moore-Penrose Inverses Using Differential Transformations // Computational and Mathematical Methods. – 2025. – Issue 1. <https://doi.org/10.1155/cmm4/8895138>
6. **Աբգարյան Հ.Ս.** Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման ծրագրային իրականացումը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ (I) // ՀՀ ԳԱԱ և ՀԱՊՀ Տեղեկագիր. Տեխնիկական գիտությունների սերիա. – 2024. – Հ. 77, № 4. – էջ 520-527.
7. **Симонян С.О., Аветисян А.Г., Абгарян О.С.** К определению комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2025. - № 1.– С. 9-19.
8. **Աբգարյան Հ.Ս.** Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման ծրագրային իրականացումը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ (II) // ՀՀ ԳԱԱ և ՀԱՊՀ Տեղեկագիր. տեխնիկական գիտությունների սերիա.- 2025.- Հ. 78, №1
9. **Симонян С.О.** Методы определения однопараметрических обобщенных обратных матриц: Монография.- LAP LAMBERT Academic Publishing RU, Saarbrücken, Deutschland, 2017. - 222 с.
10. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1984. - 419с.
11. **Абгарян О.С., Симонян С.О., Аветисян А.Г., Чилингарян М.Г., Меликян А.В.** Об автоматизированном определении однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза // Вестник НПУА: Сборник научных статей. – 2025. - № 1. – С. 86-91.

12. Աբգարյան Հ.Ս., Սիմոնյան Ս.Հ., Ավետիսյան Ա.Գ., Չիլինգարյան Մ.Գ., Մելիքյան Ա.Վ., Խաչատրյան Մ.Գ. Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների ավտոմատացված որոշման կիրառական ծրագրային փաթեթի իրականացումը // Լրաբեր. Գիտական հոդվածների ժողովածու. – 2026. – N^o 1.

Received on 10.10.2025.

Accepted for publication on 29.01.2026.

ՄՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՈՒԶԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԴԵԿՈՄՊՈԶԻՑԻՈՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ս.Հ. Սիմոնյան, Հ.Ս. Աբգարյան, Մ.Գ. Խաչատրյան

Ներկայացված է Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն թվա-անալիտիկ եղանակների ծրագրային իրականացումների համեմատական վերլուծությունը՝ դրանց հաշվողական բնութագրերի բացահայտման նպատակով: Թվա-անալիտիկ մեթոդները համապատասխանում են նախապես մշակված և Մուր-Պենրոուզի 4 պայմաններին՝ հիմնված անալիտիկ հարաբերակցությունների վրա, ինչպես նաև օգտագործում են Պուլսոլի դիֆերենցիալ ձևափոխությունները՝ որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ: Նշված հաշվողական եղանակների հիման վրա մշակվել է կիրառական ծրագրային փաթեթ՝ տեղեկատվական տեխնոլոգիաների ժամանակակից միջոցներով, մասնավորապես՝ ծրագրավորման Python լեզվով, math մոդուլով, NumPy, SymPy և PyQt գրադարաններով:

Յուրաքանչյուրի մեթոդի թվա-անալիտիկ եղանակների ծրագրային իրականացումները համեմատվել են ըստ իրագործման ժամանակի կախվածության՝ մատրիցային դիսկրետների քանակից, ըստ իրագործման ժամանակի կախվածության՝ մուտքային մատրիցի չափերից, ըստ օգտագործված հիշողության կախվածության՝ մատրիցային դիսկրետների քանակից, ըստ օգտագործված հիշողության կախվածության՝ մուտքային մատրիցի չափերից: Յուրաքանչյուրի իրագործման ժամանակը և օգտագործած հիշողությունը: Բացի այդ, Մուր-Պենրոուզի 3-րդ և 4-րդ պայմանների հիման վրա մշակված թվա-անալիտիկ եղանակների ծրագրային իրագործման համար պահանջվում են ավելի քիչ ժամանակ և ավելի փոքր ծավալով հիշողություն, քան Մուր-Պենրոուզի 1-ին և 2-րդ

պայմանների հիման վրա մշակված թվա-անալիտիկ եղանակների ծրագրային իրագործման համար:

Անանցքային բառեր. Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրից, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, թվա-անալիտիկ եղանակներ, կիրառական ծրագրային փաթեթ, հաշվողական բնութագրեր:

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ МУРА-ПЕНРОУЗА

С.О. Симонян, О.С. Абгарян, М.Г. Хачатрян

Представлен сравнительный анализ программных реализаций численно-аналитических декомпозиционных методов определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза с целью выявления их вычислительных характеристик. Численно-аналитические методы основаны на ранее разработанных аналитических соотношениях, основанных на 4-ех условиях Мура-Пенроуза, а также используют дифференциальные преобразования Пухова в качестве основного математического аппарата. На основе указанных вычислительных методов разработан прикладной программный пакет с использованием современных средств информационных технологий, в частности, языка программирования Python, модуля math, библиотек NumPy, SymPy и PyQt.

Для каждого метода программные реализации численно-аналитических методов сравнивались по зависимостям времени выполнения от количества матричных дискретов, времени выполнения от размера входной матрицы, используемой памяти от количества матричных дискретов, используемой памяти от размера входной матрицы. Показано, что с увеличением числа матричных дискретов точность определения обобщенной обратной матрицы возрастает, но при этом потребляются большие вычислительные ресурсы, в частности, увеличиваются время выполнения и объем памяти, используемой каждым методом. Кроме того, программная реализация численно-аналитических методов, разработанных на основе 3-го и 4-го условий Мура-Пенроуза, требует меньше времени и меньшего объема памяти, чем программная реализация численно-аналитических методов, разработанных на основе 1-го и 2-го условий Мура-Пенроуза.

Ключевые слова: комплексная однопараметрическая обобщенная обратная матрица Мура-Пенроуза, дифференциальные преобразования, численно-аналитические методы, прикладной программный пакет, вычислительные характеристики.