УДК 514.01; 81,116.
DOI: 10.53297/18293336-2025.2-18

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ И ЧИСЛОВЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Г.Ц. Акопян, А.В. Акопян

Ереванский государственный университет

Проведено исследование дополнительных новых свойств треугольника, являющегося одной из основных важнейших фигур планиметрии. Рассматриваются точки некоторой плоскости, и для трех заданных базовых точек A, B и C этой плоскости вводятся следующие определения: точка X называется треугольной относительно базовых, если существует треугольник с длинами сторон $|XA|$, $|XB|$ и $|XC|$; упорядоченная тройка чисел (a, b, c) называется числовым треугольником относительно базовых, если существует треугольная относительно базовых точка X, для которой $|XA| = a$, $|XB| = b$ и $|XC| = c$. Для заданных базовых точек исследуются две задачи: нахождение треугольных точек и числовых треугольников относительно базовых. Рассматривается только тот случай, когда все три базовые точки A, B и C находятся на одной и той же прямой и точка B находится на отрезке AC. Предполагается, что такой прямой является ось абсцисс, и точка B совпадает с началом координат. При таком предположении множество треугольных точек относительно базовых становится симметричным относительно оси абсцисс. Выделяется четыре возможных варианта расположения этих точек: 1) совпадение всех трех базовых точек; 2) совпадение только двух базовых точек A и B; 3) общий случай различных базовых точек, где $|AB| > |BC|$; 4) частный случай различных базовых точек, где $|AB| = |BC|$. Для каждого из этих случаев демонстрируется множество треугольных относительных базовых точек плоскости; описывается множество треугольных относительно базовых точек оси абсцисс и соответствующее этим точкам множество числовых треугольников. Обращается внимание также на междисциплинарную функцию категории относительности, в частности, в системе языка.

Ключевые слова: плоскость, треугольник, базовые точки, относительность, треугольная точка относительно базовых, числовой треугольник.

Введение. Треугольники являются составными частями многих объемных конструкций. Форма и свойства этой геометрической фигуры применяются при решении большого круга разнообразных теоретических и практических задач, возникающих во многих областях науки и техники: математике, механике, физике, электронике, строительной инженерии и т.д. Треугольники играют также важную роль в компьютерной графике, и, с точки зрения дизайна, правильно расположенные треугольники делают изображение более сбалансированным [1-3].

Постановка задачи. Упорядоченная тройка чисел называется числовым треугольником, если существует треугольник с длинами сторон, равными числам этой тройки [4, 5]. Для заданных трех фиксированных точек некоторой прямой плоскости опишем множество всех таких точек этой же плоскости, для которых расстояния до фиксированных точек образуют числовой треугольник.

Результаты исследования. Рассмотрим декартову плоскость, и пусть A, B, C и X являются точками этой плоскости [6]. Через $|AB|$ обозначим длину отрезка AB. Точке X однозначным образом соответствует упорядоченная тройка чисел ($|XA|$, $|XB|$, $|XC|$).

Определение 1. **Точку $\boldsymbol{X}$ плоскости назовем треугольной относительно точек $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ или $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$-треугольной, если существует треугольник с длинами сторон $|\boldsymbol{XA}|$, $|\boldsymbol{XB}|$ и $|\boldsymbol{XC}|$.**

Отметим, что три неотрицательных числа могут стать длинами сторон треугольника, если наибольшая из них не больше суммы двух остальных. Мы будем рассматривать также вырожденные треугольники с нулевой площадью.

Определение 2. **Упорядоченную тройку чисел $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ назовем числовым треугольником относительно точек $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$, если существует $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$-треугольная точка $\boldsymbol{X}$, для которой**

$$|\boldsymbol{XA}| = \boldsymbol{a},\ |\boldsymbol{XB}| = \boldsymbol{b} \text{ и } |\boldsymbol{XC}| = \boldsymbol{c}.$$

Для заданных точек A, B и C введем следующие обозначения:

1) $\blacksquare\ (A, B, C)$ – множество (A, B, C)-треугольных точек плоскости;
2) $\blacktriangle\ (A, B, C)$ – множество числовых треугольников, соответствующих (A, B, C)-треугольным точкам плоскости;
3) $\square\ (A, B, C)$ – множество (A, B, C)-треугольных точек оси x;
4) $\triangle\ (A, B, C)$ – множество числовых треугольников, соответствующих (A, B, C)-треугольным точкам оси x.

Точки A, B и C назовем *базовыми*, поскольку они являются основными точками для определения и сравнения относительных треугольных точек и числовых треугольников. Изменение этих точек приводит к изменению таких относительных объектов. Будем рассматривать только те случаи, когда базовые точки A, B и C находятся на одной прямой. Предположим, что они расположены на оси x, B совпадает с началом координат O и находится на отрезке AB. При таких предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма. **$\blacksquare\ (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ симметрично относительно оси абсцисс.**

Доказательство следует из того, что симметричным относительно оси абсцисс точкам соответствуют одинаковые упорядоченные тройки.

Рассмотрим возможные случаи расположения точек A, B и C.

1. ***Случай совпадения всех базовых точек.***

Теорема 1. **Если A= B= C= $\boldsymbol{O}$, то:**

a) $\square\ (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O})$ **совпадает с осью абсцисс;**

b) $\triangle\ (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O})$ **состоит из всех возможных равносторонних числовых треугольников;**

c) $\blacksquare\ (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O})$ **совпадает со всей плоскостью;**

d) $\blacktriangle\ (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O}) = \Delta(\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{O})$**.**

Доказательство следует из того, что каждой точке X плоскости, лежащей на окружности с радиусом l, соответствует числовой равносторонний треугольник со стороной, равной l. Только началу координат соответствует вырожденный треугольник со стороной 0.

2. ***Случай совпадения двух базовых точек.***

Теорема 2. **Если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O} = (\mathbf{0},\mathbf{0})$, $\boldsymbol{C}$= $(\boldsymbol{n},\mathbf{0})$, где $\boldsymbol{n} > \mathbf{0}$, то:**

a) $\square\ (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{C})$ **состоит из следующих точек оси абсцисс:**

$$(-\infty,-\boldsymbol{n}] \cup [\tfrac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{3}},+\infty);$$

b) $\triangle\ (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{C})$ **состоит из следующих числовых треугольников:**

$$\{(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}+\boldsymbol{n}),(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}-\boldsymbol{n}) | \boldsymbol{l} \in [\boldsymbol{n},+\infty]\} \cup \{(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}-\boldsymbol{l}) \mid \boldsymbol{l} \in [\tfrac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{3}},\boldsymbol{n}]\};$$

c) $\blacksquare\ (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O},\boldsymbol{C})$ **состоит из следующих точек $\boldsymbol{X}$ плоскости:**

$$\{|\boldsymbol{XQ}| = \boldsymbol{l} \mid \boldsymbol{l} \geq \tfrac{\mathbf{2n}}{\mathbf{3}})\}, \textbf{ где } \boldsymbol{Q} = \left(-\tfrac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{3}},\mathbf{0}\right).$$

Доказательство. На рис. 1, кроме точек O, C, представлены точки

$$P = (-n,0),\ Q = (-\tfrac{n}{3},0),\ N = (0,\tfrac{n}{\sqrt{3}}),$$

$$R = (\tfrac{n}{3},0),\ T = \left(\tfrac{n}{2},0\right) \text{ и } X=(x,y).$$

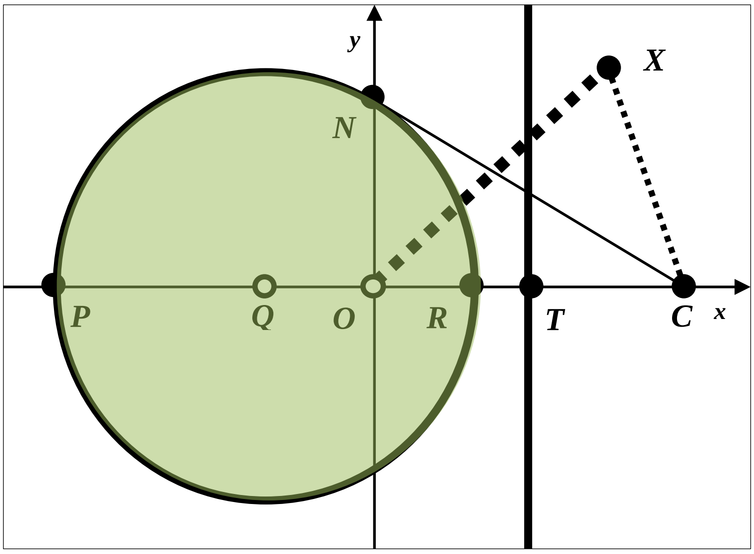

Рис. 1. Случай совпадения двух базовых точек

Тогда $|OX| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|CX| = \sqrt{(x-n)^2 + y^2}$, и тройка чисел $|OX|, |OX|$ и $|CX|$ образует числовой треугольник, если $2|OX| \geq |CX|$:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-n)^2 + y^2}.$$

Возведя обе части этого неравенства в квадрат и преобразуя, получим

$$(x + \frac{n}{3})^2 + y^2 \geq (\frac{2n}{3})^2,$$

которому удовлетворяют точки плоскости, не расположенные внутри окружности с центром Q и радиусом $\frac{2n}{3}$. Множество ■ (O, O, C) представлено на рис. 1 незатемненной областью и точками полученной окружности. Только точке C и точкам окружности соответствуют вырожденные числовые треугольники. Заметим, что угол *OCN* равен 30°. Отметим, что точкам прямой $x = \frac{n}{2}$ соответствуют все равнобедренные числовые треугольники, длины сторон которых не меньше, чем $\frac{n}{2}$, причем точке $T = (\frac{n}{2}, 0)$ соответствует равносторонний числовой треугольник.

3*. Общий случай различных базовых точек.*

***Теорема 3.* Если $\boldsymbol{A = (-m, 0), B = O = (0, 0), C = (n, 0)}$, где $\boldsymbol{m > n > 0}$, то:**

a) □ $\boldsymbol{(A, B, C)}$ состоит из следующих точек оси абсцисс:

$$\boldsymbol{(-\infty, -m-n] \cup [n-m, \frac{n-m}{3}] \cup [m+n, +\infty);}$$

b) △ $\boldsymbol{(A, B, C)}$ состоит из следующих числовых треугольников:

$$\boldsymbol{\{(n+l,\ m+n+l,\ m+2n+l) | l \geq 0\} \cup}$$
$$\boldsymbol{\cup \{(2m+n+l,\ m+n+l,\ m+l) | l \geq 0\} \cup}$$
$$\boldsymbol{\cup \{(n+l, m-n+l, m+l) \,|\, l \in [0, \frac{2m-2n}{3}]\}.}$$

Доказательство. На рис. 2, кроме точек *A*, *O*, *C*, представлены точки

$$P = (-m-n, 0), E = (n-m, 0), T = \left(\frac{n-m}{2}, 0\right),$$
$$F = (\frac{n-m}{3}, 0),\ R = (m+n, 0) \text{ и } X=(x, y).$$

Тогда $|AB| = m$, $|BC| = n$, $|AX| = \sqrt{(x+m)^2 + y^2}$, $|OX| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $|CX| = \sqrt{(x-n)^2 + y^2}$.

Заметим, что точкам прямой $x = \frac{n-m}{2}$ соответствуют равнобедренные числовые треугольники, а точке T – нулевой.

Если $x \geq \frac{n-m}{2}$, то $|XA| > |XB|$ и $|XA| > |XC|$, и тройка чисел $(|XA|, |XB|, |XC|)$ образует числовой треугольник при

$$|XA| \leq |XB| + |XC|,$$
$$\sqrt{(x+m)^2 + y^2} \ \leq \ \sqrt{x^2 + y^2} \ + \ \sqrt{(x-n)^2 + y^2}.$$

На рис. 2 дугой *F-f-R* вместе с симметричной ей относительно оси *x* дугой *F- f₁-R* отмечено множество точек (*x*, *y*), которые превращают это неравенство в равенство.

Если же $x \leq \frac{\boldsymbol{n-m}}{\boldsymbol{2}}$, то тройка чисел ($|XA|$, $|XB|$, $|XC|$) образует числовой треугольник при $|XC| \leq |XB| + |XA|$:

$$\sqrt{(x-n)^2+y^2} \ \leq \ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x+m)^2+y^2}.$$

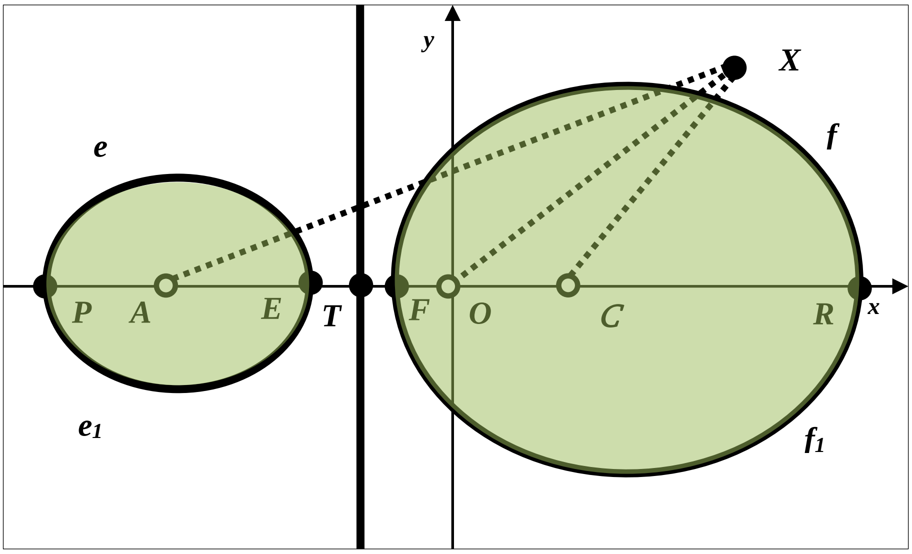

Рис. 2. Общий случай различных базовых точек

На рис. 2 дугой *P*-*e*-*T* вместе с симметричной ей относительно оси *x* дугой *P*- e_1-*T* отмечено множество точек (*x*, *y*), которые превращают это неравенство в равенство. Множество ■ (A, B, C) состоит из тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют приведенным неравенствам, и на рис. 2 оно представлено незатемненной областью и точками указанных четырех дуг. А множество □ (A, B, C) состоит из тех точек оси абсцисс, которые не расположены между точками *P* и *E*, а также между *F* и *R*, и состоит из указанных в теореме точек оси абсцисс. Заметим, что точкам (x, y) плоскости, для которых в приведенных неравенствах выполняется равенство, соответствуют вырожденные числовые треугольники. Из этих точек только *P*, *E*, *F* и *R* находятся на оси абсцисс.

4. *Частный случай различных базовых точек*

Теорема 4. **Если $\boldsymbol{A = (-n, 0), B = O = (0,0), C = (n, 0), n > 0}$, то:**

a) **□ $\boldsymbol{(A, B, C)}$ состоит из следующих точек оси абсцисс:**

$$\square\ (\boldsymbol{A, B, C}) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \mid \boldsymbol{x} \in (-\infty, -\boldsymbol{n}] \cup [\tfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}}, +\infty)\};$$

b) **△ $\boldsymbol{(A, B, C)}$ состоит из следующих числовых треугольников:**

$$\triangle\ (\boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{C}) = \{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}, \boldsymbol{2n}+\boldsymbol{l}, \boldsymbol{3n}+\boldsymbol{l}) \mid \boldsymbol{l} \in (\boldsymbol{0}, +\infty] \cup$$

$$\cup \{(\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{n})\} \cup \{(\boldsymbol{3n}+\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{2n}+\boldsymbol{l},\ \boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}) \mid \boldsymbol{l} \in (\boldsymbol{0},+\infty].$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.

На рис. 3, кроме точек A, O, C, представлены точки

$$P = (-2n, 0),\ R = (2n, 0) \text{ и } X=(x, y).$$

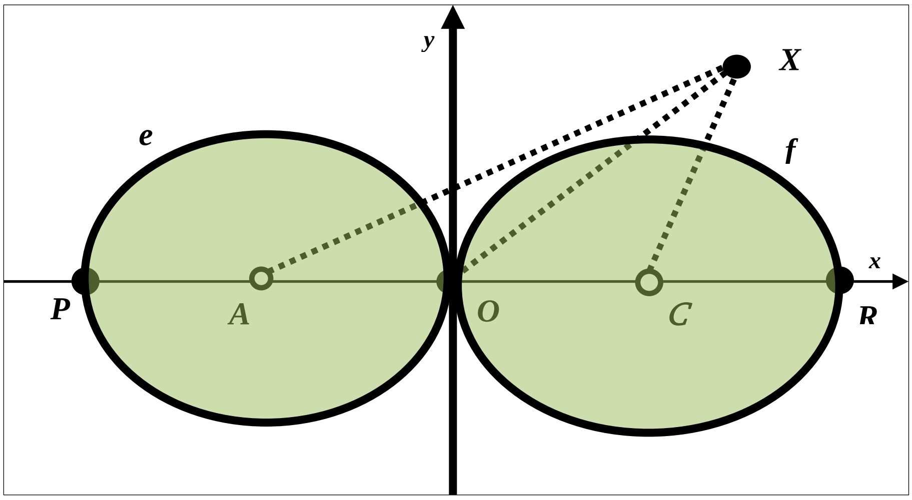

Рис. 3. Частный случай различных базовых точек

Заметим, что в этом случае множество ■ (A, B, C) является симметричным также относительно оси ординат, и точкам этой оси соответствуют равнобедренные числовые треугольники.

Категория относительности. Применяемый нами термин "относительно" представляет собой универсальный элемент, функционирующий как показатель релятивности. Значение релятивных и функциональных отношений проявляется в разных научных и когнитивных системах и находится на стыке математики, логики и лингвистики. Категория относительности как универсальный маркер зависимости и соотнесенности рассмотрен в теоретических и прикладных трудах по физике, математике, логике, лингвистике, а также в междисциплинарных исследованиях. В частности, в языковой системе эта лексема выполняет функцию семантического маркера связи между объектами или понятиями естественного языка и выражает зависимость смысла одного высказывания от другого, указывает на контекстуальную соотнесенность, степень или меру явления [7-10]. Фактически значение относительности формирует *точку отсчета*, благодаря которой смысловое содержание фразы приобретает оценочную или сравнительную направленность. В лингвистике данное слово является индикатором реляционной семантики, выявляющей смысловую зависимость между элементами высказывания. В математике этим же термином обозначается функциональное отношение и указывается на параметрическую связь с базовыми элементами, что необходимо при описании относительных объектов. Таким образом, как в лингвистике, так и в математике применяемый термин является оператором отношения, обеспечивающим переход от абсолютного значения к контекстуальному, от самостоятельной единицы к соотнесенной.

Заключение. Различные свойства тех или иных треугольников прямо или косвенно использованы при решении большого круга прикладных задач (см., например, [11-13]). Во многих таких задачах широко применяются, в частности, равносторонние треугольники. Полученные результаты показывают, что только в первых двух рассмотренных случаях образуются равносторонние числовые треугольники, причем в первом – все возможные, а во втором – только один. А в случае, когда базовые точки не находятся на одной прямой, только центру описанной окружности этих точек соответствует равносторонний числовой треугольник. Исследования числовых треугольников открывают возможность выявления новых свойств, которые в дальнейшем могут быть использованы на практике.

Литература

1. **Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.** Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974. – 384 с.
2. **Шубников А.В., Копцик В.А.** Симметрия в науке и искусстве. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 560 с.
3. **Андерсон Д.А.** Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. – 960 с.
4. **Акопян Г.Ц.** Числовой тетраэдр // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – Ер., 2025.– № 1. – С. 20-27.
5. **Հակոբյան Հ.** Թվային եռանկյուններ // Համակարգչային գիտություններ և կիրառական մաթեմատիկայի արդի խնդիրներ (ՀԳԿՄԱԽ). – Երևան: ԵՊՀ, 2025. – Էջ 29-30:
6. **Ильин В.А., Позняк Э.Г.** Аналитическая геометрия. – М.: Физматгиз, 2006. – 224 с.
7. **Акопян А.В.** Определение информационных параметров языковых конструкций // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – Ер., 2017.– № 2. – С. 47-51.
8. **Арутюнова Н.Д.** Предложение и его смысл. Логико-семантические проблемы. – М.: URSS, 2022 . – 384 с.

9. **Гладкий А.В.** О точных и математических методах в лингвистике и других гуманитарных науках // Вопросы языкознания. – М.: Наука, 2007.– № 5. – С. 73-88.
10. **Колшанский Г.В.** Логика и структура языка. – М.: URSS, 2018. – 240 с.
11. **Заславский А.А.** Сравнительная геометрия треугольника и тетраэдра // Ма-тем. просв.- М., 2004.- Вып. 8.- С. 78–92.
12. **Матизен В., Дубровский В.** Из геометрии тетраэдра // Квант.- 1988.– № 9. – С. 66–71.
13. **Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф.** Задачи по стереометрии. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

Поступила в редакцию 24.10.2025.
Принята к опубликованию 29.01.2026.

ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ԹՎԱՅԻՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

Հ.Ց. Հակոբյան, Ա.Վ. Հակոբյան

Կատարվել է հարթաչափության հիմնական և կարևորագույն պատկերներից մեկի՝ եռանկյան լրացուցիչ նոր հատկությունների ուսումնասիրությունը: Դիտարկվում են որոշ հարթության կետեր, և տրված երեք հիմքային A, B և C կետերի համար ներմուծվում են հետևյալ սահմանումները. X կետը կոչվում է **եռանկյունային՝ հիմքայինների նկատմամբ**, եթե գոյություն ունի եռանկյուն, որի կողմերի երկարությունները հավասար են $|XA|$, $|XB|$ և $|XC|$, և (a, b, c) կարգավորված թվային եռյակը կոչվում է **թվային եռանկյուն՝ հիմքայինների նկատմամբ**, եթե գոյություն ունի այնպիսի եռանկյունային X կետ՝ հիմքայինների նկատմամբ, որի համար $|XA| = a$, $|XB| = b$ և $|XC| = c$: Տրված հիմքային կետերի դեպքում ուսումնասիրվում է երկու խնդիր՝ եռանկյունային կետերի և թվային եռանկյունների հայտնաբերումը հիմքայինների նկատմամբ: Քննարկվում է միայն այն դեպքը, երբ երեք A, B և C հիմքային կետերը գտնվում են նույն ուղղի վրա, և B կետը գտնվում է AC հատվածի վրա: Ենթադրվում է, որ այդ ուղիղը համընկնում է x-առանցքի հետ, իսկ B կետը համընկնում է սկզբնակետին: Այդ դեպքում եռանկյունային կետերի բազմությունը՝ հիմքայինների նկատմամբ, դառնում է սիմետրիկ x-առանցքի նկատմամբ: Առանձնացվում է չորս հնարավոր տարբերակ՝ 1) բոլոր երեք հիմքային կետերը համընկնում են, 2) միայն երկու՝ A և B կետերն են համընկնում, 3) տարբեր հիմքային կետերի ընդհանուր դեպքը, երբ $|AB| > |BC|$, 4) տարբեր հիմքային կետերի մասնավոր դեպքը, երբ $|AB| = |BC|$: Յուրաքանչյուր դեպքում ցուցադրվում է եռանկյունային կետերի բազմությունը՝ հիմքայինների նկատմամբ, նկարագրվում են x-առանցքի եռանկյունային կետերի բազմությունը և դրանց

համապատասխանող թվային եռանկյունները: Նշվում է նաև հարաբերականության կատեգորիայի միջառարկայական գործառույթը, մասնավորապես՝ լեզվի համակարգում:

Առանցքային բառեր. հարթություն, եռանկյուն, հիմքային կետեր, հարաբերականություն, եռանկյունային կետ հիմքայինների նկատմամբ, թվային եռանկյուն:

RELATIVITY AND NUMERICAL TRIANGLES

H.Ts. Hakobyan, A.V. Hakobyan

Additional new properties of the triangle, which is one of the main and most important figures in plane geometry are investigated. Points of a certain plane are considered and for three given base points A, B, and C of this plane, the following definitions are introduced: point X is called *triangular relative to the base points* if there exists a triangle with side lengths $|XA|$, $|XB|$ and $|XC|$; an ordered triple of numbers (a, b, c) is called a *numerical triangle relative to the base points* if there exists a point X that is triangular relative to the base points, so that $|XA| = a$, $|XB| = b$ and $|XC| = c$. For the given base points, two problems are studied: finding triangular points and numerical triangles relative to the base points. Only the case where all three base points A, B and C lie on the same straight line is considered, with point B located on the segment AC. It is assumed that this line is the x-axis, and that point B coincides with the origin. Under this assumption, the set of triangular points relative to the base points becomes symmetric with respect to the x-axis. Four possible configurations of these points are distinguished:1) all three base points coincide; 2) only two base points A and B coincide; 3) the general case of distinct base points where $|AB| > |BC|$; 4) the special case of distinct base points where $|AB| = |BC|$. For each of these cases the set of triangular points relative to the base points of the plane is demonstrated; the set of triangular points on the x-axis and the corresponding set of numerical triangles are described. Attention is also drawn to the interdisciplinary function of the category of relativity, particularly within the language system.

Keywords: plane, triangle, base points, relativity, triangular point relative to the base, numerical triangle.