

ОЦЕНКА ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЛЕВОСТОРОННЕГО ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ ФУНКЦИИ

М.К. Дарахчян, О.Г. Оганян, З.Г. Ханамирян, С.А. Мнацаканян

Национальный политехнический университет Армении

Рассмотрена задача оценки значения функционала качества в задачах вариационного исчисления оптимального управления при изменении граничного условия.

В системах управления существует определенное допустимое изменение контролируемого параметра, исходя из которого проектируется система управления. В отличие от обычных систем управления, в оптимальных системах управления существует еще один показатель - значение функционала качества, который также зависит от контролируемых параметров. Поэтому допустимый диапазон изменения контролируемых параметров в оптимальных системах управления следует определять исходя из допустимого изменения функционала качества. С учетом вышесказанного оценка значения функционала качества при изменении граничных условий имеет теоретическое и практическое значение. Сказанное имеет важное значение для задач, решаемых численными методами.

В статье предложен метод оценки значения функционала качества в задачах вариационного исчисления оптимального управления, решаемых непрямым численным методом в виде степенного ряда с точностью второго члена, при изменении левостороннего граничного условия функции. Согласно разработанному методу, как функция оптимизации, так и функционал качества представляются в виде функции параметра, определяющего левостороннее граничное условие функции. Другими словами, параметр, определяющий граничное условие, является аргументом функции оптимизации. Разработан математический аппарат для определения коэффициентов в указанном ряду. Эти коэффициенты зависят от частных производных функции оптимизации по граничному параметру. Также были изучены граничные условия частных производных функции оптимизации по граничному параметру и способы определения этих функций с использованием уже известной функции оптимизации. Экспериментально продемонстрирована подлинность коэффициентов ряда Тейлора и представлен алгоритм определения этих коэффициентов.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача вариационного исчисления, граничные условия, ряд Тейлора, аргумент, функционал качества, функция оптимизации.

Введение. В системах оптимального управления из-за влияния внешних факторов возникают динамические ошибки, в результате которых изменяются как параметры цели управления, иначе говоря - граничные условия, так и значение функционала качества. В зависимости от изменения параметров цели управления, математический аппарат оценки значения функционала качества имеет практическое значение в процессе исследования и проектирования систем [1]. Данная задача достаточно уточнена в случае постоянных граничных условий [2, 3], а в случае изменяющихся граничных условий в задачах одномерного вариационного исчисления, решаемых численными методами, она решена Пуассоном [2] с точностью первого члена ряда Тейлора. Задача оценки значения функционала качества с большой точностью зависит от решения уравнения вариации Эйлера [4, 5]. В настоящей работе задача решена в виде степенного ряда с точностью второго члена в случае изменения левостороннего граничного условия функции.

Математический аппарат. Рассматривается задача безусловной динамической оптимизации:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F(y(\tau), \dot{y}(\tau), \tau) d\tau \rightarrow \min(\max), \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y(t_1) = y_1, \end{cases} \quad (2)$$

для которой необходимым условием оптимальности является уравнение Эйлера [2]:

$$F_y - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}} = 0. \quad (3)$$

Функцию оптимизации y , удовлетворяющую уравнению Эйлера (3), можно представить в следующем виде:

$$y = y(\tau, t_0, y_0, t_1, y_1).$$

Параметры t_0 , t_1 и y_1 , определяющие граничные условия, считаются постоянными. В этом случае функцию оптимизации можно рассматривать как функцию двух аргументов $y = y(\tau, y_0)$.

Оптимальное значение функционала качества будет зависеть от параметра y_0 и может быть представлено в виде

$$I(y_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(y(\tau, y_0), \dot{y}(\tau, y_0), \tau) d\tau. \quad (4)$$

Предполагается, что обе функции $y(\tau, y_0)$ и $F(y(\tau, y_0), \dot{y}(\tau, y_0), \tau)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка.

В случае изменения граничного значения функции y_0 выражение (4) примет следующий вид:

$$I(y_0 + \Delta y_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(y(\tau, y_0 + \Delta y_0), \dot{y}(\tau, y_0 + \Delta y_0), \tau) d\tau. \quad (5)$$

Представив правую часть выражения (5) в виде ряда Тейлора с точностью второго члена, получим

$$I(y_0 + \Delta y_0) = I(y_0) + \frac{dI(y_0)}{dy_0} \cdot \Delta y_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 I(y_0)}{dy_0^2} \cdot \Delta y_0^2 + \alpha(\Delta y_0^2), \quad (6)$$

где $\alpha(\Delta y_0^2)$ – слагаемые членов высших порядков.

Как следует из (6), для оценки значения функционала качества необходимо иметь значения коэффициентов $\frac{dI(y_0)}{dy_0}$ и $\frac{d^2 I(y_0)}{dy_0^2}$.

В дальнейшем изложении целесообразно использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} y(\tau, y_0) &= y; & \frac{dy}{d\tau} &= \dot{y}(\tau, y_0) = \frac{\partial y}{\partial \tau} = \dot{y}; & y(\tau, y_0)_{\tau=t_0} &= y(t_0); & \dot{y}(\tau, y_0)_{\tau=t_0} &= \dot{y}(t_0); \\ F(y, \dot{y}, \tau) &= F; & \frac{\partial F(y, \dot{y}, \tau)}{\partial y} &= F_y; & \frac{\partial F(y, \dot{y}, \tau)}{\partial \dot{y}} &= F_{\dot{y}}; & \frac{\partial F(y, \dot{y}, \tau)}{\partial \tau} &= F_{\tau}. \end{aligned}$$

Разлагая в ряд подынтегральное выражение (5), получим

$$\begin{aligned} I(y_0 + \Delta y_0) &= \int_{t_0}^{t_1} (F(y(\tau, y_0), \dot{y}(\tau, y_0), \tau) + (F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial y_0} + F_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0})_{\Delta y_0=0} \cdot \Delta y_0) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_1} ((F_{yy} \cdot (\frac{\partial y}{\partial y_0})^2 + 2 \cdot F_{y\dot{y}} \cdot \frac{\partial y}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} + F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot (\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0})^2 + F_y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial y_0^2} + F_{\dot{y}} \cdot \frac{\partial^2 \dot{y}}{\partial y_0^2})_{\Delta y_0=0} \cdot \Delta y_0^2) d\tau + \\ &+ \alpha(\Delta y_0^2). \end{aligned} \quad (7)$$

Применяя соотношения граничных условий частных производных функции $y(\tau, y_0)$ [4]:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial y(\tau, y_0)}{\partial y_0}\right)_{\tau=t_0} &= 1, \\
\left(\frac{\partial^k y(\tau, y_0)}{\partial y_0^k}\right)_{\tau=t_0} &= 0, \quad k = 2, 3, \dots, \\
\left(\frac{\partial^k y(\tau, y_0)}{\partial y_0^k}\right)_{\tau=t_1} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \tag{8}$$

преобразуя первый и второй члены выражения (7), интегрируя по частям и учитывая, что функция $y(\tau, y_0)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, получим следующее выражение для оценки изменения функционала качества:

$$\begin{aligned}
I(y_0 + \Delta y_0) &= I(y_0) - (F_{\dot{y}})_{\tau=t_0} \cdot \Delta y_0 + \frac{1}{2} \cdot \Delta y_0^2 \cdot ((-F_{y\dot{y}})_{\tau=t_0} + \\
&+ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)^2 \cdot (F_{yy} - \frac{d}{d\tau} F_{y\dot{y}}) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0}\right)^2 d\tau) + \alpha(\Delta y_0^2).
\end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, коэффициенты $\frac{dI(y_0)}{dy_0}$ и $\frac{d^2 I(y_0)}{dy_0^2}$ в (6) имеют вид

$$\begin{cases} \frac{dI(y_0)}{dy_0} = (-F_{\dot{y}})_{\tau=t_0}, \\ \frac{d^2 I(y_0)}{dy_0^2} = (-F_{y\dot{y}})_{\tau=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} ((F_{yy} - \frac{d}{d\tau} F_{y\dot{y}}) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)^2 + F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0}\right)^2) d\tau. \end{cases} \tag{10}$$

Для определения в (10) коэффициентов необходимо иметь частные производные оптимальной функции по граничным параметрам $\frac{\partial y(\tau, y_0)}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial \dot{y}(\tau, y_0)}{\partial y_0}$, которые не известны для задач, решаемых численными методами.

Эти частные производные можно определить из уравнения вариации Эйлера.

Преобразуя уравнение Эйлера в степенной ряд в окрестности y_0 и учитывая, что это уравнение выполняется независимо от Δy_0 , получим уравнение вариации первой степени:

$$(F_{yy} - \frac{d}{d\tau} F_{y\dot{y}}) \cdot \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} - F_{\dot{y}\dot{y}} \cdot \frac{\partial \ddot{y}}{\partial y_0} = 0. \tag{11}$$

Из дифференциального уравнения второго порядка (11) можно найти функцию $\partial y(\tau, y_0)/\partial y_0$ при начальных условиях (8).

Таким образом, для оценки значения функционала качества по выражению (6) необходимо:

- численным методом решить уравнение Эйлера с учетом граничных условий и найти искомую функцию и значения ее производной в точках $\tau = t_0$ и $\tau = t_1$ ($\dot{y}(\tau)_{\tau=t_0}$, $\dot{y}(\tau)_{\tau=t_1}$). В результате уравнение Эйлера с граничными условиями сводится к уравнению с начальными условиями;

- численным методом решить вариационное уравнение (11) с граничными условиями и найти значение производной функции $(\partial y(\tau)/\partial x)$ в точке $\tau = t_0$ $(\partial \dot{y}(\tau)/\partial x)_{\tau=t_0}$. В результате уравнение (11) сводится к уравнению с начальными условиями;

- решить уравнение Эйлера и уравнение вариации с начальными условиями и определить как значение функционала качества, так и коэффициенты (10).

Достоверность полученных выражений (9) и (10) можно обосновать на примере.

Пример. Оценим значение функционала качества в зависимости от изменения граничного параметра функции y_0 как прямым методом путем вычисления интеграла (4) и разложения его в степенной ряд по параметру y_0 в окрестности Δy_0 , так и предлагаемым в статье методом. Полученные результаты сравним на следующем примере:

$$I = \int_0^1 \dot{y}^2 d\tau \rightarrow \min, \quad (12)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y(1) = 2. \end{cases} \quad (13)$$

Функция оптимизации $y(\tau, y_0)$ определяется по уравнению Эйлера (3) [2]:

$$F_y - \frac{d}{d\tau} F_{\dot{y}} = 0 \rightarrow \ddot{y}(\tau, y_0) = 0.$$

В результате решения этого уравнения с учетом (13) получим

$$\begin{cases} y(\tau, y_0) = (2 - y_0) \cdot \tau + y_0, \\ \dot{y}(\tau, y_0) = 2 - y_0. \end{cases} \quad (14)$$

С учетом (14) выражение функционала (12) примет вид

$$I(y_0) = \int_0^1 (2 - y_0)^2 d\tau = (2 - y_0)^2 \cdot \tau \Big|_0^1 = (2 - y_0)^2. \quad (15)$$

В случае изменения граничного значения функции y_0 , разлагая из (15) $I(y_0 + \Delta y_0)$ в ряд Тейлора, получим

$$I(y_0 + \Delta y_0) = I(y_0) + (2 \cdot y_0 - 4) \cdot \Delta y_0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \Delta y_0^2 + \alpha(\Delta y_0^2).$$

Следовательно, с учетом (6) коэффициенты $dI(y_0)/dy_0$ и $d^2I(y_0)/dy_0^2$ будут определяться выражениями

$$\begin{cases} \frac{dI(y_0)}{dy_0} = 2 \cdot y_0 - 4, \\ \frac{d^2I(y_0)}{dy_0^2} = 2. \end{cases} \quad (16)$$

Теперь определим коэффициенты $dI(y_0)/dy_0$ и $d^2I(y_0)/dy_0^2$ разработанным в статье методом, согласно (10). Для задачи (12), (13) уравнение вариации первой степени (11) примет вид

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0} = 0, \quad (17)$$

так как $F_{yy} = 0$, $F_{y\dot{y}} = 0$, $F_{\dot{y}\dot{y}} = 2$.

В исследуемой задаче, согласно (14), начальными условиями (8) дифференциального уравнения (17) будут

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial y_0} \big|_{\tau=0} = 1, \\ \frac{\partial y}{\partial y_0} \big|_{\tau=1} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

С учетом (18) решением дифференциального уравнения (17) будет

$$\begin{cases} \frac{\partial y(\tau, y_0)}{\partial y_0} = -\tau + 1, \\ \frac{\partial \dot{y}(\tau, y_0)}{\partial y_0} = -1. \end{cases} \quad (19)$$

С учетом выражений (12), (14) и (19) на основе системы уравнений (10) для значений коэффициентов $dI(y_0)/dy_0$ и $d^2I(y_0)/dy_0^2$ получим следующие результаты:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dI}{dy_0} &= (-F_{\dot{y}})_{\tau=t_0} = (-2 \cdot \dot{y})_{\tau=t_0} = -2 \cdot (2 - y_0) = 2 \cdot y_0 - 4, \\ \frac{d^2 I}{dy_0^2} &= (-F_{y\ddot{y}})_{\tau=t_0} + \int_0^1 ((F_{yy} - \frac{d}{d\tau} F_{y\dot{y}}) \cdot (\frac{\partial y}{\partial y_0})^2 + F_{y\ddot{y}} \cdot (\frac{\partial \dot{y}}{\partial y_0})^2) d\tau = \\ &= \int_0^1 2 \cdot (-1)^2 d\tau = 2, \end{aligned} \right.$$

которые совпадают с результатами расчетов, полученными прямым методом (16).

Заключение. Оценка значения функционала качества в случае изменения граничных условий представленным в статье методом является более простым и менее трудоемким процессом по сравнению со статистическими методами. Кроме того, числовые значения указанных коэффициентов, определенные статистическим методом, не содержат достаточной информации о системе. Хотя исследуемая задача решается численным методом, коэффициенты ряда Тейлора оценки изменения значения функционала качества имеют аналитическое описание и обеспечивают максимальную информацию о задаче и системе.

Метод, основные подходы и суждения, использованные в процессе разработки данной задачи, применимы для освещения аналогичных вопросов в другом классе задач оптимального управления.

Литература

1. **Бояринов А.И., Кафаров В.В.** Методы оптимизации в химической технологии. – М.: Химия, 1969. – 564 с.
2. **Петров Ю.П.** Вариационные методы теории оптимального управления. – М.: Энергия, 1977. – 280 с.
3. **Burns J.A.** Introduction to the calculus of variations and Control with Modern Applications. - CRC press, Taylor & Francis Group, 2013. – 562 p.
4. **Саакян С.А.** Оценка изменения показателей эффективности в динамических системах управления // Вестник Инженерной академии Армении. – Ереван, 2005. – Т.2, №1. – С. 131-134.
5. **Սահակյան Ս.Ա., Դարախչյան Մ.Կ.** Օպտիմալ կառավարման միաչափ վարիացիոն հաշվի խնդիրներում վարիացիայի հավասարումների եզրային պայմանների գնահատումը // ՀԳԱԱ և ՀԱՊՀ Տեղեկագիր. ՏԳ սերիա. – 2018. – Հատոր 71, №1. – էջ 86-94:

*Поступила в редакцию 31.03.2026.
Принята к опубликованию 27.05.2026.*

**ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՀԱՇՎԻ ԽՆդիրներում ՈՐԱԿԻ
ՖՈՆԼԿԻՈՆԱԼԻ ԱՐԺԵՔԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ ՖՈՆԼԿԻԱՅԻ
ՁԱԽԱԿՈՂՄՅԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ**

Մ.Կ. Դարախչյան, Օ.Հ. Օհանյան, Զ.Գ. Խանամիրյան, Ս.Ա. Մնացականյան

Դիտարկվել է օպտիմալ կառավարման վարիացիոն հաշվի խնդիրներում եզրային պայմանի փոփոխության դեպքում որակի ֆունկցիոնալի արժեքի գնահատման խնդիրը:

Կառավարման համակարգերում գոյություն ունի կառավարվող պարամետրի որոշակի թույլատրելի փոփոխություն, որից ելնելով՝ նախագծվում է կառավարման համակարգ: Ի տարբերություն սովորական կառավարման համակարգերի՝ օպտիմալ կառավարման համակարգերում առկա է ևս մեկ ցուցանիշ՝ որակի ֆունկցիոնալի (օպտիմալության չափանիշի) արժեքը, որը կախված է նաև կառավարվող պարամետրերից: Ուստի, օպտիմալ կառավարման համակարգերում կառավարվող պարամետրերի փոփոխությունների թույլատրելի միջակայքը պետք է որոշվի՝ ելնելով նաև որակի ֆունկցիոնալի թույլատրելի փոփոխությունից: Հետևաբար, որակի ֆունկցիոնալի արժեքի գնահատումը եզրային պայմանների փոփոխության դեպքում ունի տեսական և գործնական նշանակություն: Դա հատկապես կարևոր է թվային մեթոդներով լուծվող խնդիրների դեպքում, քանի որ վերլուծաբար լուծվող խնդիրների դեպքում այն բավականին պարզ է:

Մշակվել է անուղակի թվային մեթոդով լուծվող օպտիմալ կառավարման վարիացիոն հաշվի խնդիրներում ֆունկցիայի ձախակողմյան եզրային պայմանի փոփոխության դեպքում, որակի ֆունկցիոնալի արժեքի փոփոխության աստիճանային շարքով, երկրորդ անդամի ճշտությամբ գնահատման մեթոդ: Ըստ մշակված մեթոդի՝ ինչպես օպտիմալացման ֆունկցիան, այնպես էլ որակի ֆունկցիոնալը ներկայացվում են որպես ֆունկցիաներ ֆունկցիայի ձախակողմյան եզրային պայմանը բնորոշող պարամետրից: Այլ կերպ ասած, եզրային պայմանը բնորոշող պարամետրը օպտիմալացման ֆունկցիայի համար արգումենտ է: Մշակվել է նշված շարքում գործակիցների որոշման մաթեմատիկական ապարատը: Այդ գործակիցները կախված են օպտիմալացման ֆունկցիայի՝ ըստ եզրային պարամետրի մասնակի ածանցյալներից: Ուսումնասիրվել են նաև օպտիմալացման ֆունկցիայի՝ ըստ եզրային պարամետրի մասնակի ածանցյալների եզրային պայմանները և այդ ֆունկցիաների որոշման մեթոդները՝ արդեն իսկ հայտնի օպտիմալացման ֆունկցիայի օգտագործմամբ: Փորձնական եղանակով ցույց է տրվել Թեյլորի շարքի գործակիցների իսկությունը, և ներկայացվել է այդ գործակիցների որոշման ալգորիթմը:

Առանցքային բառեր. օպտիմալ կառավարում, վարիացիոն հաշվի խնդիր, եզրային պայմաններ, Թեյլորի շարք, արգումենտ, որակի ֆունկցիոնալ, օպտիմալացման ֆունկցիա:

ESTIMATING THE QUALITY FUNCTIONAL IN OPTIMAL CONTROL VARIATIONAL CALCULUS TASKS UNDER THE CHANGES OF THE LEFT-HAND BOUNDARY CONDITION OF THE FUNCTION

M.K. Darakhchyan, O.H. Ohanyan, Z.G. Khanamiryan, S.A. Mnatsakanyan

Estimating the quality functional in optimal control variational calculus tasks under the changes of boundary condition is considered.

In control systems, there is a certain permissible change of the controlled parameter based on which the control system is designed. Unlike ordinary control systems, in optimal control systems, there is another indicator - the quality functional (optimality criteria), which also depends on the controlled parameters. Therefore, the permissible range of changes of controlled parameters in optimal control systems should be determined based on the quality functional value's tolerances. Therefore, estimating the quality functional under the changes of boundary conditions has theoretical and practical importance. It is particularly important for problems solved by numerical methods because it is quite simple for problems solved analytically.

In this article, the estimation methods of the quality functional under the changes of left-hand boundary condition of the function in the form of Taylor series with an accuracy of the second member in optimal control variational calculus tasks solved by the indirect numerical method are developed. According to the developed method, both the optimization function and the quality functional are functions of the left-hand boundary condition parameter of the function. In other words, the boundary condition parameter is an argument of the optimization function. The mathematical apparatus for determining the specified series coefficients has been developed. These coefficients depend on the partial derivatives of the optimization function by boundary parameter. The boundary conditions for partial derivative functions of the optimal function by boundary parameters, and the determination methods for these functions using the known optimal function are studied. The truth of the Taylor series coefficients, and the algorithm for their determination are shown experimentally.

Keywords: optimal control, variational calculus tasks, boundary condition, Taylor series, argument, quality functional, optimization function.