УДК 621.296.67
DOI: 10.53297/18293336-2023.1-115

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ КОЛИЧЕСТВА МАКСИМУМОВ В ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОМ ОПЫТЕ

К.А. Торчян

Национальный политехнический университет Армении

Работа посвящена известной в теории волн задаче описания интерференционного опыта, заключающейся в необходимости определения пространственного распределения максимумов и минимумов волнового поля, являющегося суперпозицией двух когерентных сферических волн. Обсуждается один существенный момент теории интерференции, который в традиционном изложении не затрагивается. Вопрос касается количества максимумов в интерференционном опыте.

Показано, что в рамках традиционного подхода, который, по сути, является приближенным, а именно - приближением Френеля, вопрос о количестве максимумов отпадает сам собой. Это обусловлено, в частности, тем обстоятельством, что в картине Френеля интерферирующие сферические волны заменяются параболоидными. В свою очередь, параболоидные волны в приближении Фраунгофера заменяются плоскими волнами. Исследовано точное выражение разности хода сферических волн. Получено точное выражение зависимости положений максимумов от величины разности хода волн. Показано, что если разность хода волн превышает расстояние между источниками, то данное выражение принимает комплексное значение. Из данного результата следует, что разность хода волн не может превышать расстояние между источниками. Результат ограниченности величины разности хода воспроизведен также векторным способом.

На основе результата об ограниченности величины разности хода показано, что ограниченным является также число максимумов интерференционной картины. Количество максимумов всегда меньше отношения расстояния между источниками и длиной волны. Если длина волны превышает расстояние между источниками, то в интерференционном опыте должен наблюдаться один максимум.

Ключевые слова: интерференция, приближение Френеля, разность хода волн, количество максимумов.

Введение. Как известно, одной из классических задач теории волн является задача описания суперпозиционного поля двух когерентных точечных источников. Данная задача призвана описывать так называемый интерференционный опыт, на базе которого, как правило, демонстрируются многие важные аспекты эффекта взаимного усиления и ослабления волн. Ввиду своей важности изложение данной задачи можно встретить почти во всех учебниках по волновой оптике, акустике и т.д. [1-4]. Вместе с тем, несмотря на общую известность, а также многочисленность методов изложения, на наш взгляд, одна из важных деталей описания интерференционного опыта мало освещена, если не сказать, что вовсе выпала из рассмотрения. Сказанное относится к количеству наблюдаемых в интерференционном опыте максимумов.

Постановка задачи и методы исследования. Данная работа посвящена выяснению ответа на вышеупомянутый вопрос о количестве максимумов в интерференционном опыте. Бесспорно, что предложенное ниже обсуждение ценно в плане всестороннего описания интерференции. Вместе с тем, как будет видно далее, точное рассмотрение интерференционного опыта может быть также полезно для задачи дифракции [5-12]. Рассмотрим описание интерференционного опыта в классической постановке. Пусть имеются два точечных источника, находящихся друг от друга на некотором отдалении d. Направляя для определенности ось X сквозь источники, указывающие положение источников, радиус-векторы могут быть записаны в виде

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_x,\ \vec{r}_2 = x_2\vec{e}_x, \tag{1}$$

$$d = \left|x_2 - x_1\right|, \tag{2}$$

где x_1, x_2 – координаты источников, а $\vec{e}_x$ - единичный вектор, указывающий положительное направление оси $\vec{e}_x$.

Здесь мы специально не поместили начало координат по центру источников, т.к. предполагаем освещение некоторых деталей дифракционного опыта в свете рассмотрения задачи интерференции волн, когда точный вид волнового поля является суммой двух сферических волн:

$$U(\vec{R},t) = \sum_{j=1}^{2} \frac{a}{\left|\vec{R} - \vec{r}_j\right|} \cos\left[\omega t - k\left|\vec{R} - \vec{r}_j\right|\right], \tag{3}$$

где исходящий из начала координат вектор $\vec{R}$ указывает точку наблюдения, а a - амплитуда волны. Здесь ω есть частота волнового поля, которая связана с волновым числом k следующим соотношением: $k = \omega / v$, где v - скорость распространения волнового возмущения.

Несмотря на наличие точного выражения поля (3), основной вопрос теории, а именно - задача определения пространственного распределения точек максимумов и минимумов интенсивности, решается приближённо. Данное приближенное описание обычно называют картиной Френеля, когда сферические волны в (3) заменяются параболоидными.

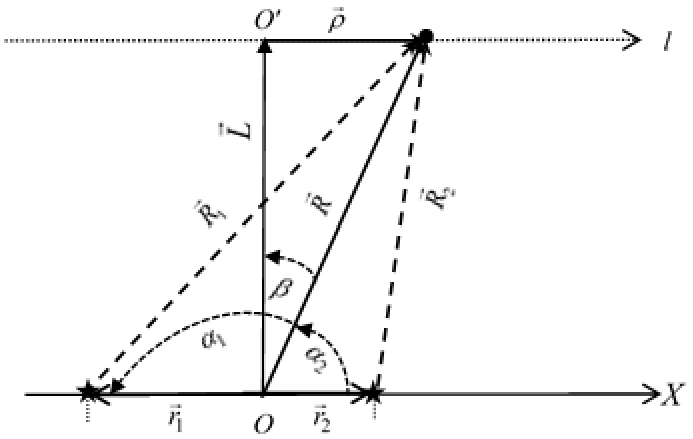

Рис. Схема интерференционного опыта

Следует отметить, что в случае частного приближения Френеля, так называемого приближения Фраунгофера, сферические волны заменяются плоскими. Однако, как известно, в интерференционной задаче приближение Фраунгофера не применяется. Оно применяется при рассмотрении задачи дифракции. Как будет показано ниже, задача определения максимумов и минимумов для интерференционного опыта может быть решена точно. Более того, в рамках точного решения вопрос о количестве максимумов разрешается естественным образом, тогда как в традиционном приближенном подходе данный вопрос выпадает из контекста рассмотрения задачи.

Пусть описание суперпозиционного поля проводится на некоторой оси l, параллельной оси источников X. Согласно рисунку, положительные направления осей l и X совпадают. Начальная точка O' оси l выбрана по направлению нормали, исходящей из начальной точки O оси X. Ясно, что при таком выборе длина отрезка OO' будет равна расстоянию между осями $L = \left|\vec{L}\right|$. На рисунке точка наблюдения указана также исходящим из точки O' вектором $\vec{\rho}$.

Предположим, что условия эксперимента подчинены следующим требованиям:

$$x_1^2 << L^2,\ x_2^2 << L^2 \text{ и } \rho^2 << L^2. \tag{4}$$

Тогда волновое поле (3) может быть представлено в виде (см., например, [13])

$$U(\vec{R},t) = \frac{a}{L}\sum_{j=1}^{2}\cos\left[\omega t - k\sqrt{L^2 + (\rho - x_j)^2}\right]. \tag{5}$$

В соответствии с (5), разность хода волн определяется выражением

$$R_1 - R_2 = \sqrt{L^2 + (\rho - x_1)^2} - \sqrt{L^2 + (\rho - x_2)^2} = \Delta, \tag{6}$$

где величина разности хода волн Δ связана с разностью фаз $\Delta\varphi$ следующим соотношением:

$$\Delta L = \Delta\varphi / k. \tag{7}$$

Хорошо известно, что если разность хода кратна длине волны, то наблюдается максимум $(\lambda = 2\pi / k)$:

$$\Delta = n\lambda \text{ (max).} \tag{8}$$

Условие минимума интенсивности записывается следующим образом:

$$\Delta = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \text{ (min).} \tag{9}$$

В (8), (9) предполагается, что $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Как отмечалось выше, в традиционном изложении задача максимумов и минимумов рассматривается приближённо. Основой для применения приближения служат условия (4). В соответствии с ними, путем соответствующих разложений радикалы в равенстве (6) могут быть заменены показательными функциями:

$$\sqrt{L^2 + (\rho - x_j)^2} \approx L + \frac{(\rho - x_j)^2}{2L}. \tag{10}$$

Легко видеть, что в случае (10) равенство (6) принимает вид

$$\frac{x_1^2 - x_2^2 - 2\rho(x_1 - x_2)}{2L} = \Delta. \tag{11}$$

Обычно именно данная формула или ее другая разновидность используется при описании интерференции (см. [1-4]). Так, если $x_1 = -x_2$, то с учетом (2) легко видеть, что (11) принимает вид

$$\rho d / L = \Delta. \tag{12}$$

Используя (12), условия максимумов (8) и минимумов (9) запишутся в виде

$$\rho d / L = n\lambda \text{ (max) и } \rho d / L = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \text{ (min),} \tag{13}$$

где никаких ограничений на значение n, кроме как $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$, нет.

Как следует из формул (8), (9), если величина разности хода волн Δ может принимать сколь угодно большое по модулю значение, то значение дискретного целого числа n также может быть сколь угодно большим. Вместе с тем величина разности хода волн является строго ограниченной, что может быть доказано, если рассматривать равенство (6) как уравнение относительно переменной ρ. Данное выражение может быть разрешено точно, и после несложных алгебраических действий нетрудно показать, что

$$\rho = \frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{\Delta}{2}\sqrt{\frac{4L^2 + d^2 - \Delta^2}{d^2 - \Delta^2}}\,. \tag{14}$$

Заметим, что для получения (14) из (6) допущение не требуется.

Как видно из данного условия, если в $d < |\Delta|$, то величина ρ принимает комплексное значение. Следовательно, разность хода волн должна быть меньше расстояния между источниками:

$$|\Delta| < d\,. \tag{15}$$

Из неравенства (15), а также условия (8) очевидным образом следует, что количество максимумов в интерференционном опыте определяется отношением расстояния между источником и длиной волны;

$$n < d/\lambda\,. \tag{16}$$

То, что разность хода в интерференционном опыте меньше расстояния между источниками, может быть доказано также на основе следующих векторных соотношений (см. рис.):

$$\vec{R}_1 = \vec{R} - \vec{r}_1,\ \vec{R}_2 = \vec{R} - \vec{r}_2\,. \tag{17}$$

Из данных векторных равенств следует, что

$$\vec{R}_1 - \vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1\,. \tag{18}$$

Полагая для определенности $R_1 > R_2$, можем написать

$$\left|\vec{R}_1 - \vec{R}_2\right| \le R_1 - R_2\,. \tag{19}$$

Так как $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = d$, то из (19) непосредственным образом следует (15)
.

Используя (17), можем написать

$$R_1 = \sqrt{R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\alpha_1}\,,\ R_2 = \sqrt{R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\cos\alpha_2}\,. \tag{20}$$

Обозначая угол по направлению против часовой стрелки между векторами $\vec{R}$ и $\vec{L}$ через β (см. рис.), нетрудно видеть, что

$$\alpha_1 = \beta + \pi/2,\ \alpha_2 = \beta - \pi/2\,. \tag{21}$$

Используя (20), (21) для (6), получим

$$\Delta = R_1 - R_2 = \sqrt{R^2 + r_1^2 + 2Rr_1 \sin\beta} - \sqrt{R^2 + r_2^2 - 2Rr_2 \sin\beta}\,. \qquad (22)$$

Нетрудно видеть, что величина Δ как функция β является монотонной функцией. По модулю она достигает своего минимального значения $\Delta = 0$, когда $\beta = 0$, и своего максимального значения $\Delta = d$, когда $\beta = \pi / 2$.

Заключение. Таким образом, показано, что разность хода волн в интерференционном опыте является конечной величиной, значение которой ограничено расстоянием между источниками. В соответствии с данным результатом ограниченным является также число максимумов интерференционной картины. Количество максимумов всегда меньше отношения расстояния между источниками и длиной волны. Если длина волны превышает расстояние между источниками, то в интерференционном опыте должен наблюдаться один максимум.

Литература

1. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. – М.: Наука, 1973. –720 с.
2. **Горелик Г.С.** Колебания и волны. – М.: Физматлит, 2007. – 656 с.
3. **Ландсберг Г.С.** Оптика. – М.: Физматлит, 2003. – 656 с.
4. **Исакович М.А.** Общая акустика. – М.: Наука, 1973. – 848 с.
5. **Malacara D**. Interference: Physical Optics and Light Measurements// Methods in Experimental Physics. - 1989. - V. 26.- P. 1–48.
6. **Berg M.J., Sorensen Ch.M.** A review and reassessment of diffraction, scattering, and shadows in electrodynamics// Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.- 2018. - V. 210. – P. 225-239.
7. **Bezus E.A., Doskolovich L.L., Soifer V.A.** Near-wavelength diffraction gratings for surface plasmon polaritons // Opt. Lett.-2015.-V. 40, № 21.– P. 4935–4938.
8. **Liscidini M., Sipe J.E.** Analysis of Bloch-surface-wave assisted diffraction-based biosensors // J. Opt. Soc. Am. B.- 2009.-V. 26, № 2. - P. 279–289.
9. **Vedad F.A.** New Concept for Analysis of Diffraction// European Journal of Applied Physics.- 2021.- V. 3.- P. 36–42.
10. **Mori S., Nakajima H., Kotani A., Harada K.** Recent advances in small-angle electron diffraction and Lorentz microscopy // Microscopy.-2021.- V. 70, № 1.- P. 59–68.
11. **Glückstad J., Madsen A.E.** New analytical diffraction expressions for the Fresnel Fraunhofer transition regime// Optik-2023.- V. 285.- P. 170950.

12. **Khachatrian A.Zh.** The Fraunhofer Pattern of a Wave Field Generating by a System of Coherent Emitting Point Sources // Armenian Journal of Physics.- 2021.- V. 14, №4.- P. 201-212.
13. **Хачатян А.Ж.** К задаче описания волнового поля системы точечных когерентно излучающих источников // Изв. НАН Армении. Физика.- 2021. -Т. 56, №4.- С. 470–483.

Поступила в редакцию 15.02.2023.
Принята к опубликованию 19.06.2023.

ԻՆՏԵՐՖԵՐԵՆՑԻԱՅԻ ՓՈՐՁՈՒՄ ՄԱՔՍԻՄՈՒՄՆԵՐԻ ՔԱՆԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Կ.Ա. Թոռյան

Ներկայացվել է ալիքային տեսության ինտերֆերենցիայի փորձի նկարագրման խնդիրը, որը պահանջում է ալիքային դաշտի ինտենսիվության մաքսիմումների և մինիմումների բաշխման նկարագրում, երբ վերադրվում են երկու կոհերենտ սֆերիկ ալիքներ: Աշխատանքում հիմնական ուշադրությունը բևեռված է ինտերֆերենցիայի տեսության մի կարևոր հանգամանքի վրա, ինչը, որպես կանոն, ավանդական դիտարկման ժամանակ չի քննարկվում: Հարցը վերաբերում է ինտերֆերենցիոն փորձում դիտվող մաքսիմումների քանակին:

Ցույց է տրված, որ ավանդական մոտեցման մեջ, որը, ըստ էության, հանդիսանում է մոտավորություն, ավելի կոնկրետ՝ Ֆրենելի մոտավորություն, մաքսիմումների քանակի հարցը ինքնին դուրս է մնում դիտարկման շրջանակից: Դա, մասնավորապես, պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ Ֆրենելի մոտավորությունում սֆերիկ ալիքները փոխարինվում են պարաբոլականներով: Պարաբոլական ալիքները, իրենց հերթին, Ֆրաունհոֆերի մոտավորության շրջանակներում փոխարինվում են հարթ ալիքներով: Սֆերիկ ալիքների համար հետազոտվել է ընթացքների տարբերության ճշգրիտ արտահայտությունը: Ստացվել է մաքսիմումների դիրքի ճշգրիտ կախվածությունը ալիքների ընթացքի տարբերությունից: Ցույց է տրված, որ եթե ալիքների ընթացքի տարբերությունը գերազանցում է աղբյուրների միջև հետավորությանը, ապա տվյալ արտահայտությունն ընդունում է կոմպլեքս արժեքներ: Այդ արդյունքից հետևում է, որ ընթացքների տարբերությունը չի կարող գերազանցել աղբյուրների միջև եղած հեռավորությանը: Ալիքների ընթացքի սահմանափակությունը վերարտադրված է նաև վեկտորական եղանակով:

Ալիքների ընթացքի մեծության սահմանափակության արդյունքի հիման վրա ցույց է տրվել, որ սահմանափակ է նաև ինտերֆերենցիոն պատկերում դիտվող մաքսիմումների

քանակը: Մաքսիմումների քանակը միշտ լինում է փոքր աղբյուրների միջև եղած հեռավորության և ալիքի երկարության հարաբերությունից: Եթե ալիքի երկարությունը մեծ է աղբյուրների միջև հեռավորությունից, ապա ինտերֆերենցիոն փորձում դիտվում է մեկ մաքսիմում:

Առանցքային բառեր. ինտերֆերենց, Ֆրենելի մոտավորություն, ալիքների ընթացքի տարբերություն, մաքսիմումների քանակ:

THE LIMITATION OF THE NUMBER OF MAXIMA IN THE INTERFERENCE EXPERIMENT

K.A. Torchyan

The work is devoted to the well-known problem in the wave theory of describing an interference experiment, which consists in the need to determine the spatial distribution of the maxima and minima of the wave field, which is a superposition of two coherent spherical waves. The paper discusses one essential moment of the theory of interference, which is not touched upon in the traditional presentation. The question concerns the number of maxima in the interference experiment.

It is shown that within the framework of the traditional approach, which is essentially approximate, namely the Fresnel approximation, the question of the number of maxima drops out by itself. This is due, in particular, to the fact that in the Fresnel picture, interfering spherical waves are replaced by paraboloid ones. Paraboloid waves, in turn, are replaced by plane waves in the Fraunhofer approximation. An exact expression for the difference between the paths of spherical waves is studied. An exact expression is obtained for the dependence of the positions of the maxima on the magnitude of the difference between the wave paths. It is shown that if the difference between the wave paths exceeds the distance between the sources, this expression takes on a complex value. It follows from this result that the difference between the wave paths cannot exceed the distance between the sources. The result of the limited value of the path difference is also reproduced in a vector way.

Based on the result on the boundedness of the path difference, it is shown that the number of maxima of the interference pattern is also bounded. The number of maxima is always less than the ratio of the distance between the source and the wavelength. If the wavelength exceeds the distance between the sources, one maximum should be observed in the interference experiment.

***Keywords*:** interference, Fresnel approximations, wave path difference, number of maxima.