

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 621.52+512.643.4

К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ

С.О. Симонян, А.В. Меликян, О.С. Папоян, Р.В. Гумроян

Национальный политехнический университет Армении

Матричные уравнения Сильвестра и Риккати обычно встречаются в задачах синтеза систем управления, а уравнения Ляпунова – в задачах анализа систем управления. В работе предложены методы решения динамических однопараметрических матричных уравнений типа Риккати, базирующиеся на соответствующих спектральных моделях, основанных на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова (математический аппарат дифференциальных преобразований функций и уравнений), принципиально отличающиеся от известных интегральных преобразований и обладающие определенными положительными вычислительными характеристиками по сравнению с последними. К динамическим однопараметрическим матричным уравнениям типа Риккати сводятся задачи управления и наблюдения систем управления при оптимизации интегральных критериев качества.

Как показывают исследования, одним из сравнительно простых подходов решения таких задач является применение дифференциальных преобразований, приводящих к рекуррентным алгебраическим соотношениям, легко реализуемым средствами современных информационных технологий.

В работе в результате использования дифференциальных преобразований и алгебраизации исходной задачи получена спектральная модель, порождающая следующие вычислительные схемы:

- последовательная рекуррентная вычислительная схема - прямое представление;
- последовательная рекуррентная вычислительная схема - кронекерово представ-

ление.

При использовании спектральной модели получают рекуррентные вычислительные структуры, которые генерируются при начальном матричном дискрете $X(0)$ с дальнейшим вычислением последующих матричных дискретов $X(1), X(2), \dots$ путем использования вспомогательных матричных дискретов $Y(0), Y(1), Y(2), \dots$ и т.д.

Рассмотрен модельный пример, решение которого получено предложенными вычислительными схемами. В обоих случаях удалось обойти сложную операцию численного интегрирования динамических матричных уравнений, обычно имеющего место в существующих методах, и получить совпадающие друг с другом приемлемые решения задачи.

Ключевые слова: динамические однопараметрические матричные уравнения типа Риккати, дифференциальные преобразования, спектральные модели, матричные дискреты, последовательные рекуррентные вычислительные схемы, модельный пример, информационные технологии.

Введение. В работе [1] для решения динамических однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t), \quad X(t_0) = \text{fix} \quad (1)$$

(где $X(t)$ - неизвестная матрица, подлежащая определению) были предложены рекуррентные нижнетреугольные блочно-матричные и блочно-гиперматрично-гипервекторные вычислительные структуры, базирующиеся на дифференциальных преобразованиях [2]. Был также рассмотрен модельный пример, решение которого было получено обеими предложенными вычислительными структурами.

В работе [3] для решения задачи (1) были предложены другие два метода, также базирующиеся на дифференциальных преобразованиях. В обоих случаях были использованы матрицанты $M_A(t, t_0)$ и $M_B(t, t_0)$ однопараметрических матриц $A(t)$ и $B(t)$ (переходные матрицы): в первом случае использованы фундаментальные свойства этих переходных матриц [4], а во втором случае - общее решение задачи непосредственно [5]. Вышеотмеченный модельный пример был решен также этими двумя методами. Во всех случаях были получены совпадающие друг с другом с большой точностью приближенные решения задачи.

В настоящей работе рассматривается динамическое матричное уравнение Риккати [6,7]

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= [A(t) - X(t)] \cdot X(t) + X(t) \cdot [A(t) - X(t)] = \\ &= A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot A(t) - 2 \cdot X^2(t), \quad X(t_0) = \text{fix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $X(t) \in R^{m \times m}$, $A(t) \in R^{m \times m}$, t_0 - начало динамического процесса. Для решения этой задачи воспользуемся подходом, рассмотренным в [1].

Математический аппарат. Динамическое однопараметрическое матричное уравнение (2) можно представить также в виде матричной дифференциально-алгебраической системы Сильвестра

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = Y(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot Y(t), & X(t_0) = \text{fix}, \\ Y(t) = A(t) - X(t), & Y(t_0) = A(t_0) - X(t_0), & Y(t_0) = \text{fix}. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть однопараметрические матрицы $A(t)$, $X(t)$ и $Y(t)$ обладают достаточно гладкими элементами в центре аппроксимации t_v , иными словами, имеют место матричные дифференциальные преобразования [1,3]

$$A(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \Leftrightarrow A(t) = \alpha_1(t, t_v, H, A(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (4)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K X(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \Leftrightarrow X(t) = \alpha_2(t, t_v, H, X(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (5)$$

$$Y(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \frac{\partial^K Y(t)}{\partial t^K} \Big|_{t=t_v}, \quad K = \overline{0, \infty} \Leftrightarrow Y(t) = \mathfrak{a}_3(t, t_v, H, Y(K), K = \overline{0, \infty}), \quad (6)$$

где $A(K)$, $X(K)$ и $Y(K)$, $K = \overline{0, \infty}$ - матричные дискреты матриц $A(t)$, $X(t)$ и $Y(t)$ в центре аппроксимации $t = t_v$; K - целочисленный аргумент; H - масштабная постоянная, имеющая размерность аргумента t , $\mathfrak{a}_1(\cdot)$, $\mathfrak{a}_2(\cdot)$, $\mathfrak{a}_3(\cdot)$ - аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $X(t)$ и $Y(t)$ соответственно.

Теперь дифференциально-алгебраическую систему Сильвестра (3) с учетом соотношений (4) - (6) из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом получим следующую спектральную математическую модель:

$$\begin{cases} \frac{K+1}{H} \cdot X(K+1) = \sum_{l=0}^{K} Y(l) X(K-l) + \sum_{l=0}^{K} X(K-l) Y(l), & X(0) = X(t_0) = \text{fix}, & (7a) \\ Y(K) = A(K) - X(K), & Y(0) = A(t_0) - X(t_0) = A(0) - X(0) = \text{fix}, & (7b) \end{cases}$$

где матричные дискреты:

$$A(K) = \begin{bmatrix} a_{11}(K) & \dots & a_{1m}(K) \\ a_{21}(K) & \dots & a_{2m}(K) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(K) & \dots & a_{mm}(K) \end{bmatrix}, \quad X(K) = \begin{bmatrix} X_{11}(K) & \dots & X_{1m}(K) \\ X_{21}(K) & \dots & X_{2m}(K) \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{m1}(K) & \dots & X_{mm}(K) \end{bmatrix},$$

$$Y(K) = \begin{bmatrix} Y_{11}(K) & \dots & Y_{1m}(K) \\ Y_{21}(K) & \dots & Y_{2m}(K) \\ \dots & \dots & \dots \\ Y_{m1}(K) & \dots & Y_{mm}(K) \end{bmatrix}, \quad K = \overline{0, \infty}. \quad (8)$$

Последняя порождает следующие вычислительные схемы:

1. Последовательная рекуррентная вычислительная схема - прямое представление

При изменении целочисленного аргумента K имеем:

при $K = 0$:

$$\begin{cases} X(1) = Y(0) \cdot X(0) + X(0) \cdot Y(0), & X(0) = \text{fix}, & (9a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(0) = A(0) - X(0); & (9b) \end{cases}$$

при $K = 1$:

$$\begin{cases} 2 \cdot X(2) = Y(0) \cdot X(1) + X(1) \cdot Y(0) + Y(1) \cdot X(0) + X(0) \cdot Y(1), & (10a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(1) = A(1) - X(1); & (10b) \end{cases}$$

при $K = 2$:

$$\begin{cases} 3 \cdot X(3) = Y(0) \cdot X(2) + X(2) \cdot Y(0) + Y(1) \cdot X(1) + X(1) \cdot Y(1) + Y(2) \cdot X(0) + \\ \quad + X(0) \cdot Y(2), \\ Y(2) = A(2) - X(2) \end{cases} \quad (11a)$$

$$(11b)$$

и т.д.

Таким образом, с учетом начального матричного дискрета $X(0)$, вычислив матричные дискреты $Y(0), X(1); Y(1), X(2); Y(2), X(3)$ и т.д. в соответствии с (9b), (9a), (10b), (10a), (11b), (11a), ..., по правой части соотношения (5) можно определить и искомую неизвестную матрицу $X(t)$ задачи (2).

2. Последовательная рекуррентная вычислительная схема - кронекерово представление

Использование аппарата кронекеровых произведений матриц [5] позволяет систему (7a), (7b) представить в виде

$$\begin{cases} \frac{K+1}{H} \cdot \hat{X}_{m^2 \times 1}(K+1) = \sum_{l=0}^{l=K} [Y(l) \otimes E^T + E \otimes Y^T(l)] \hat{X}_{m^2 \times 1}(K-l) = \\ \quad = \sum_{l=0}^{l=K} [Y(K-l) \otimes E^T + E \otimes Y^T(K-l)] \hat{X}_{m^2 \times 1}(l), \quad X(0) = \text{fix}, \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} Y(K) = A(K) - X(K), \quad Y(0) = A(0) - X(0) = \text{fix}, \end{cases} \quad (12b)$$

где гипервекторы

$$\hat{X}(K) = (X_{11}(K) \dots X_{1m}(K); X_{21}(K) \dots X_{2m}(K); \dots; X_{m1}(K) \dots X_{mm}(K))^T, K = \overline{0, \infty},$$

а $\otimes$ - знак кронекерова произведения матриц.

Отсюда при изменении целочисленного аргумента K имеем:

при $K = 0$:

$$\begin{cases} \hat{X}(1) = [Y(0) \otimes E^T + E \otimes Y^T(0)] \cdot \hat{X}(0), \quad X(0) = \text{fix}, \\ Y(0) = A(0) - X(0); \end{cases} \quad (13a)$$

$$(13b)$$

при $K = 1$:

$$\begin{cases} 2 \cdot \hat{X}(2) = [Y(1) \otimes E^T + E \otimes Y^T(1)] \cdot \hat{X}(0) + \\ \quad + [Y(0) \otimes E^T + E \otimes Y^T(0)] \cdot \hat{X}(1), \\ Y(1) = A(1) - X(1); \end{cases} \quad (14a)$$

$$(14b)$$

при $K = 2$:

$$\begin{cases} 3 \cdot \hat{X}(3) = [Y(2) \otimes E^T + E \otimes Y^T(2)] \cdot \hat{X}(0) + [Y(1) \otimes E^T + E \otimes Y^T(1)] \cdot \hat{X}(1) + \\ \quad + [Y(0) \otimes E^T + E \otimes Y^T(0)] \cdot \hat{X}(2), \\ Y(2) = A(2) - X(2) \end{cases} \quad (15a)$$

$$(15b)$$

и т.д.

Таким образом, с учетом начального матричного дискрета $X(0)$, вычислив матричный дискрет $Y(0)$ в соответствии с (13b), а затем и гипервекторный дискрет $\hat{X}(1)$ с учетом гипервекторного дискрета $\hat{X}(0)$ и матричного дискрета $Y(0)$ в соответствии с (13a), а также вычислив матричный дискрет $Y(1)$ в соответствии с (14b), а затем и гипервекторный дискрет $\hat{X}(2)$ с учетом гипервекторных дискретов $\hat{X}(0)$ и $\hat{X}(1)$ в соответствии с (14a) и т.д., наконец по правой части соотношения (5) можно определить и искомую неизвестную матрицу $X(t)$.

Модельный пример. Пусть задано динамическое матричное уравнение

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -t^2 \\ 0 & -t & t \\ t & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X(t) + X(t) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -t^2 \\ 0 & -t & t \\ t & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot X^2(t), \quad X(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

При $t_v = 0$, $H = 1$ имеем

$$A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(K) = [0], \quad \forall K \geq 3.$$

Рассмотрим решение задачи предложенными методами.

1. Применение прямого представления:

при $K = 0$ согласно (9b), (9a) имеем

$$\left\{ \begin{aligned} Y(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ X(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \end{aligned} \right.$$

при $K = 1$ согласно (10b), (10a) имеем

$$\left\{ \begin{aligned} Y(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ 2 \cdot X(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -6 \\ 23 & -2 & 17 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right.$$

откуда

$$X(2) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 23/2 & -1 & 17/2 \\ -1 & 5/2 & -2 \end{bmatrix};$$

при $K = 2$ согласно (11b), (11a) имеем

$$\left\{ \begin{aligned} Y(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 23/2 & -1 & 17/2 \\ -1 & 5/2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -23/2 & 1 & -17/2 \\ 1 & -5/2 & 2 \end{bmatrix}, \\ 3 \cdot X(3) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 23/2 & -1 & 17/2 \\ -1 & 5/2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -23/2 & 1 & -17/2 \\ 1 & -5/2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 23/2 & -1 & 17/2 \\ -1 & 5/2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -23/2 & 1 & -17/2 \\ 1 & -5/2 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -53/2 & 3 & -41/2 \\ 139/2 & -20 & 58 \\ -37/2 & 13 & -43/2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right.$$

откуда

$$X(3) = \begin{bmatrix} -53/6 & 1 & -41/6 \\ 139/6 & -20/3 & 58/3 \\ -37/6 & 13/3 & -43/6 \end{bmatrix}$$

и т.д.

2. Применение кронекерова представления:

при $K = 0$ согласно (13b), (13a) имеем

$$\left\{ \begin{aligned}
 Y(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \hat{X}(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 0 & & & & & & & & & & & \\
 & 0 & & & 0 & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & & \\
 \hline
 & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & & & \\
 \hline
 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & & &
 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 0 & 0 & 2 & & & & & & & & & \\
 0 & 1 & 1 & & 0 & & & & & & & \\
 0 & -1 & 1 & & & & & & & & & \\
 \hline
 & & & 0 & 0 & 2 & & & & & & \\
 & 0 & & 0 & 1 & 1 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & -1 & 1 & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & 0 & 0 & 2 & & & \\
 & 0 & & & 0 & & 0 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & 0 & -1 & 1 & & &
 \end{array} \right] \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 0 & 0 & 2 & & & & & & & & & \\
 0 & 1 & 1 & & 0 & & & & & & & \\
 0 & -1 & 1 & & & & & & & & & \\
 \hline
 & & & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & & & \\
 & 0 & & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & & & \\
 & & & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & & & \\
 \hline
 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & & & \\
 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & & & \\
 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & & &
 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};
 \end{aligned} \right.$$

при $K = 1$ согласно (14b), (14a) имеем

$$\begin{aligned}
Y(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
2 \cdot \hat{X}(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -4 \\ 9 \\ -4 \\ 7 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -6 \\ 23 \\ -2 \\ 17 \\ -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

откуда

$$\hat{X}(2) = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 23/2 \\ -1 \\ 17/2 \\ -1 \\ 5/2 \\ -2 \end{bmatrix};$$

при $K = 2$ согласно (15b), (15a) имеем

$$\begin{aligned}
 Y(2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 23/2 & -1 & 17/2 \\ -1 & 5/2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -23/2 & 1 & -17/2 \\ 1 & -5/2 & 2 \end{bmatrix}, \\
 3 \cdot \hat{X}(3) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & & & & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & & 0 & & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & & & & 0 & 0 & 2 \\ \hline -23/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -17/2 & 0 & 0 \\ 0 & -23/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -17/2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -23/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -17/2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -5/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5/2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -5/2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] + \\
 &+ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 4 & -23/2 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & -5/2 & & 0 & & & & \\ 2 & -17/2 & 2 & & & & & & \\ \hline & & & 4 & -23/2 & 1 & & & \\ 0 & & & 0 & 1 & -5/2 & & 0 & \\ \hline & & & 2 & -17/2 & 2 & & & \\ \hline & & & & & & 4 & -23/2 & 1 \\ 0 & & & & 0 & & 0 & 1 & -5/2 \\ & & & & & & 2 & -17/2 & 2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \\
 &+ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & -4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 3 & 0 & 0 & & & & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & & 0 & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & & & 1 & -3 & 2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \\
 &+ \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 1 & & & & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & & & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline & & & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 23/2 \\ -1 \\ 17/2 \\ -1 \\ 5/2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15/2 \\ 5 \\ -17/2 \\ 18 \\ -16 \\ 20 \\ -12 \\ 6 \\ -21/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -9 \\ 22 \\ -8 \\ 18 \\ -5 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \\ 59/2 \\ 4 \\ 20 \\ -3/2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53/2 \\ 3 \\ -41/2 \\ 139/2 \\ -20 \\ 58 \\ -37/2 \\ 13 \\ -43/2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

откуда

$$\hat{X}(3) = \begin{bmatrix} -53/6 & 1 & -41/6 & 139/6 & -20/3 & 58/3 & -37/6 & 13/3 & -43/6 \end{bmatrix}^T$$

и т.д.

Очевидно, что при применении обоих методов получены одни и те же матричные дискреты (что и должно было быть). Следовательно, окончательное маклореновское решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot t + \\ &+ \begin{bmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 23/2 & -1 & 17/2 \\ -1 & 5/2 & -2 \end{bmatrix} \cdot t^2 + \begin{bmatrix} -53/6 & 1 & -41/6 \\ 139/6 & -20/3 & 58/3 \\ -37/6 & 13/3 & -43/6 \end{bmatrix} \cdot t^3 + \dots = \\ &= \begin{bmatrix} (1-4t^2-(53/6) \cdot t^3 + \dots) & (1+t+t^3 + \dots) \\ (4 \cdot t + (23/2) \cdot t^2 + (139/6) \cdot t^3 + \dots) & (-1-t-t^2-(20/3) \cdot t^3 + \dots) \\ (-2-2 \cdot t-t^2-(37/6) \cdot t^3 + \dots) & ((5/2) \cdot t^2 + (13/3) \cdot t^3 + \dots) \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} (-t-3 \cdot t^2-(41/6) \cdot t^3 + \dots) \\ (1+4 \cdot t + (17/2) \cdot t^2 + (58/3) \cdot t^3 + \dots) \\ (-1-t-2 \cdot t^2-(43/6) \cdot t^3 + \dots) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Заключение. Таким образом, математический аппарат дифференциальных преобразований функций и уравнений позволил обойти труднореализуемую операцию численного интегрирования динамических матричных уравнений Риккати, существенно снизить объём вычислительных процедур и получить численно-аналитическое решение задачи. При этом исходное динамическое матричное уравнение в области дифференциальных изображений редуцируется в спектральную модель (7a), (7b), порождающую последовательные рекуррентные вычислительные структуры. Отмеченные вычислительные процедуры могут быть эффективно реализованы средствами современных информационных технологий [8]. К тому же, ввиду того, что дифференциальные преобразования являются точным операционным методом, то получаемая при его использовании спектральная модель (7a), (7b) не обладает методической погрешностью, обуславливающей получение решения динамического матричного уравнения (2) с необходимой точностью.

Литература

1. Симонян С.О., Папоян О.С. К решению динамических однопараметрических матричных уравнений типа Сильвестра $\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot B(t), X(t_0) = \text{fix}$ //

Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника.- 2018.- №2.- С. 9-20.

2. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений.- Киев: Наукова думка, 1984.- 420 с.
3. **Симонян С.О.** Решение динамических однопараметрических линейных уравнений с применением дифференциальных преобразований // Известия НАН РА и НПУА. Серия Техн. наук.- 2018.- Т. LXXI, №4.- С. 503-509.
4. **Чаки Ф.** Современная теория управления.- М.: Мир, 1975.- 424 с.
5. **Гантмахер Ф.П.** Теория матриц.- М.: Наука, 2010.- 560 с.
6. **Uwe Helmke and John B. Moore** Optimization and Dynamical Systems.- Springer-Verlag London Limited, 1994.- 389 p.
7. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления.- М.: Высшая школа, 1998.- 573 с.
8. **Stroustrup B.** The C++ Programming Language.-4th Edition.- Boston: Addison-Wesley professional, 2013.- 1368 p.

*Поступила в редакцию 15.01.2019.
Принята к опубликованию 15.05.2019.*

ՌԻԿԱԿԱՏԻԻ ՏԻՊԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒՇՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս.Հ. Սիմոնյան, Ա.Վ. Մելիքյան, Հ.Ս. Պապոյան, Հ.Վ. Գումրոյան

Սիվլեստրի և Ռիկկատիի մատրիցային հավասարումները սովորաբար հանդիպում են կառավարման համակարգերի սինթեզի խնդիրներում, իսկ Լյապունովի հավասարումները՝ կառավարման համակարգերի անալիզի խնդիրներում: Աշխատանքում առաջարկված են Ռիկկատիի տիպի դինամիկ միապարամետրական մատրիցային հավասարումների լուծման եղանակներ՝ հիմնված Գ.Ե. Պոլսովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների (ֆունկցիաների և հավասարումների դիֆերենցիալ ձևափոխությունների մաթեմատիկական ապարատ) կիրառմամբ ստացված համապատասխան տարրապատկերային մոդելների վրա, որոնք սկզբունքորեն տարբերվում են հայտնի ինտեգրալային ձևափոխություններից և վերջիններիս համեմատությամբ աչքի են ընկնում որոշակի դրական հաշվողական բնութագրերով:

Ռիկկատիի տիպի դինամիկ միապարամետրական մատրիցային հավասարումների են հանգեցվում կառավարման համակարգերի կառավարման և դիտելիության խնդիրները՝ ինտեգրալային որակի չափանիշների օպտիմալացման դեպքերում:

Ինչպես ցույց են տալիս հետազոտությունները, այդպիսի խնդիրների լուծման համեմատաբար հեշտ իրականացվող մոտեցումներից մեկը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառումն է, որոնք հանգեցնում են ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների միջոցով հեշտությամբ իրականացվող անդրադարձ հանրահաշվական առնչությունների:

Աշխատանքում դիֆերենցիալ ձևափոխությունների օգտագործման և նախնական խնդրի հանրահաշվականացման արդյունքում ստացվել է տարրապատկերային մոդել, որը ծնում է հետևյալ հաշվողական սխեմաները.

- հաջորդական անդրադարձ հաշվողական սխեմա (ուղղակի ներկայացում),
- հաջորդական անդրադարձ հաշվողական սխեմա (կրոնեկերյան ներկայացում):

Տարրապատկերային մոդելի օգտագործման դեպքում ստացվում են անդրադարձ հաշվողական կառույցներ, որոնք գեներացվում են սկզբնական $X(0)$ մատրիցային դիսկրետի դեպքում՝ հետագայում հերթական $X(1), X(2), \dots$ մատրիցային դիսկրետների հաշվմամբ՝ $Y(0), Y(1), Y(2), \dots$ օժանդակ մատրիցային դիսկրետների օգտագործման ճանապարհով:

Դիտարկվել է մոդելային օրինակ, որի լուծումն ստացվել է առաջարկված հաշվողական սխեմաներով: Երկու դեպքում էլ հաջողվել է շրջանցել դինամիկ մատրիցային հավասարումների թվային ինտեգրման բարդ գործողությունը, որը սովորաբար տեղի ունի գոյություն ունեցող մեթոդներում, և ստանալ խնդրի իրար հետ համընկնող ընդունելի լուծումը:

Առանցքային բաներ. Ռիկկատիի տիպի դինամիկ միապարամետրական մատրիցային հավասարումներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, տարրապատկերային մոդելներ, մատրիցային դիսկրետներ, հաջորդական անդրադարձ հաշվողական կառույցներ, մոդելային օրինակ, տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ:

A SOLUTION OF DYNAMIC ONE-PARAMETRIC RICCATI-TYPE MATRIX EQUATIONS

S.H. Simonyan, A.V. Melikyan, H.S. Papoyan, H.V. Gumroyan

The Sylvester-type and Riccati-type matrix equations are usually encountered in control systems synthesis problems, while Lyapunov's equations - in control systems analysis problems. Methods for solving dynamic one-parameter matrix equations of Riccati-type, based on the corresponding spectral models based on G.E. Pukhov's differential transformations (mathematical apparatus of differential transformations of functions and equations) are proposed, which are fundamentally different from the well-known integral transformations and possess certain positive computational characteristics in comparison with the latter. Control problems and control systems observation problems in the optimization of integral quality criteria are reduced to dynamic one-parametric Riccati-type matrix equations.

Studies show that one of the relatively simple approaches to solving such problems is the use of differential transformations, leading to recurrent algebraic relations easily implemented by means of modern information technologies.

In the work, as a result of using differential transformations and algebraization of the original problem, a spectral model is obtained, generating the following computational schemes:

- sequential recurrent computational scheme (direct representation),
- sequential recurrent computational scheme (kronecker representation).

When using the spectral model recurrent computational structures are obtained, which are generated at the initial $X(0)$ matrix discrete, with further calculation of the subsequent $X(1), X(2), \dots$ matrix discretely, by using $Y(0), Y(1), Y(2), \dots$ auxiliary matrix discretely.

A model example is considered, the solution of which is obtained by the proposed computational schemes. In both cases, it was possible to circumvent the complex operation of numerical integration of dynamic matrix equations, usually occurring in the existing methods, and obtain coinciding acceptable solutions to the problem.

Keywords: dynamic one-parametric Riccati-type matrix equations, differential transformations, spectral models, matrix discretely, sequential recurrent computational scheme, model example, information technologies.