

UDC 62-52 + 513.1

*ENGINEERING GRAPHICS*

DOI: 10.53297/18293387-2022.2-84

## HOMOLOGICAL MAPPING OF THREE-DIMENSIONAL SPACE AND RELIEF PERSPECTIVE

**K.H. Soghomonyan, M.Z. Poghosyan, M.G. Bakunts**

*National Polytechnic University of Armenia*

The homological features of one particular type of projective mapping of three-dimensional space are considered. It is proved that the double plane of homology is parallel to the imaginary plane figure in the space. It is shown that by means of homology, the entire three-dimensional semi-space is mapped on the area bounded by two parallel planes. The obtained image formed by mapping satisfies the conditions of the relief perspective, therefore, a homological connection is established between the space and its relief image. Thus, the relief perspective of the space can be obtained through mapping.

Issues on the synthesis of projective conversions are considered, which allow to reflect the infinite part of the space on a limited domain.

Thus, the aim of our research is to study the very geometric transformations, which will allow to project the given space onto its boundary domain. They can serve as a basis for development of geometrical modeling algorithms of the relief perspective and the automation of their construction. The present issue is of practical importance as the existence of the computer model of the relief image will make it possible to automate the process of designing the relief image containing objects and organize their production with the help of digitally controlled machines (as well as 3D printers).

**Keywords:** projective mapping, space transformation, improper plane, double elements, homology, relief perspective.

**Introduction.** Plane linear perspective is a graphical model built on the plane by means of space projective mapping through the central projection method.

The geometrical principles of constructing the given model have been known since ancient times and are now widely used in engineering, especially in the fields of architecture and design. However, for creative work, it is sometimes necessary to create not only the plane graphical model of the three-dimensional reality, but also its relief image, placing it in a limited space. "Relief perspective" is considered to be one of such images that fits in this or that narrow strip of space making the same impression on the viewer as the original one at the previously selected point.

Unlike plane graphical modeling, the geometrical principles of relief modeling aren't completely studied and the necessary theoretical principles for constructing

such models haven't been discovered yet by means of which it would be possible to develop a kind of some computer modeling technology.

**The choice of space transformation.** In order to solve the given problem it is necessary to have the transformation of such extended (projective) space in which every point of space and its image are arranged on the line passing through one fixed point. That transformation should also be projective, so that the set of the imaginary (infinitely far) space points can be projected on an ordinary plane.

The transformation satisfying these conditions can be synthesized as follows:  
Consider the bunch of lines, having the center  $S_1=S_2$  in space (Fig. 1).

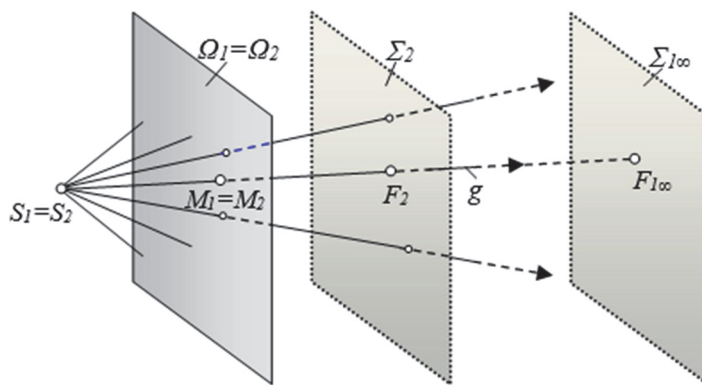


Fig. 1. The choice of transformation

The set of points belonging to that bunch of lines includes all the points of the extended space. Perform projective transformation on every line of the bunch by means of two double points and the boundary point [1,2].

Let's choose the common point of all the lines of the bunch, that is the center of the bunch  $S_1=S_2$ , as a double point. Let the second double points be arranged on the arbitrarily chosen plane  $\Omega_1=\Omega_2$ .

For example, the intersection point of line  $g$  and that plane, that is,  $M_1=M_2$ , will be the second of the double points on that line of the projective compliance. It is obvious that the plane  $\Omega_1=\Omega_2$  will be the double transformation plane synthesized in the space. The set of imaginary points on all the lines of the bunch is arranged on a single plane -  $\Sigma_{1\infty}$ , which is the imaginary (infinitely far) plane in the extended space. Let's choose the figure  $\Sigma_2$  on that plane (i.e. the boundary plane) which should obviously be parallel to the dual plane  $\Omega_1=\Omega_2$ . Therefore, the intersection point  $F_2$  of each line  $g$  and the plane  $\Sigma_2$  will be the image of the imaginary point  $F_{1\infty}$  on that line (the boundary point).

Thus, a transformation is confirmed in the space, which is the projection of the entire half-space between the planes  $\Omega_1=\Omega_2$  and  $\Sigma_{1\infty}$  on the domain bounded by two planes:  $\Omega_1=\Omega_2$  and  $\Sigma_2$ .

Now let us show that the transformation synthesized above is projective.

For this, it is enough to prove that the image of an arbitrary line in space is also a line. Consider a projection where the planes  $\Omega_1=\Omega_2$  and  $\Sigma_2$  are depicted in the form of parallel lines (Fig. 2).

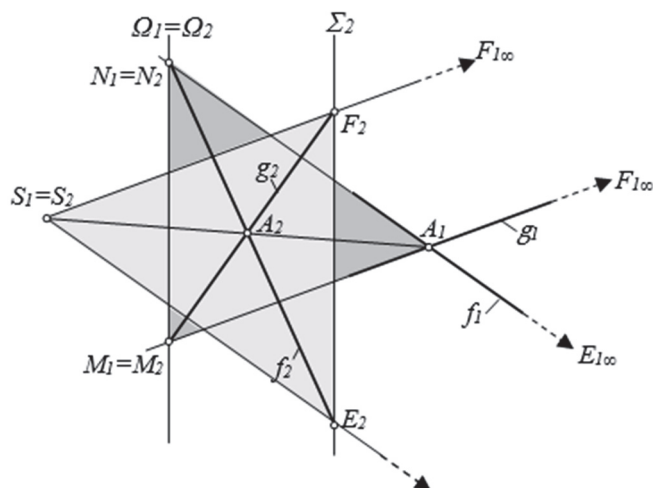


Fig. 2. Line image

Let's draw the image of the arbitrary line  $g_1$ . That image will pass through the double point  $M_1=M_2$  and the boundary point  $F_2$  of that line. Show that the line  $g_2=M_2F_2$  is the image of  $g_1$ . For this, it is enough to prove that the image  $A_2$  of an arbitrary point  $A_1$  on the line  $g_1$  will be arranged on the line  $g_2$ . Consider another line  $f_1$  passing through point  $A_1$ , the image of which will pass through the double point  $N_1=N_2$  and the boundary point of that line  $E_2$ . In order to arrange the image  $A_2$  on the line  $g_2$ , it is enough that the lines  $g_2$ ,  $f_2$  and  $A_1S_1$  intersect in a single point. As it can be seen, all the corresponding sides of the triangles  $A_1M_1N_1$  and  $S_2F_2E_2$  are parallel to each other (their points of intersection line up on one imaginary line). Therefore, according to Desargue's theorem [3,4], the lines connecting the corresponding vertices of the triangles  $A_1M_1N_1$  and  $S_2F_2E_2$  intersect in the single point ( $A_2$ ).

Since the image of an arbitrary line in space is also a straight line, the transformation under consideration is one of the varieties of projective transformation, which has one double point and one double plane, and the corresponding points are arranged on the straight line passing through the double point. As it is well known, in projective geometry, the transformation satisfying these conditions is called homology of the extended space [3,5,6].

**The relief perspective of space.** It can be concluded from the above mentioned that the homological transformation projects the entire semi-space on a narrow strip bounded by two planes. The image formed by that projection satisfies the conditions

of the relief prospect, therefore, a homological connection is established between the space and its relief image.

Making use of the properties of homological correspondence one can construct the relief perspective of any object given in the complex drawing.

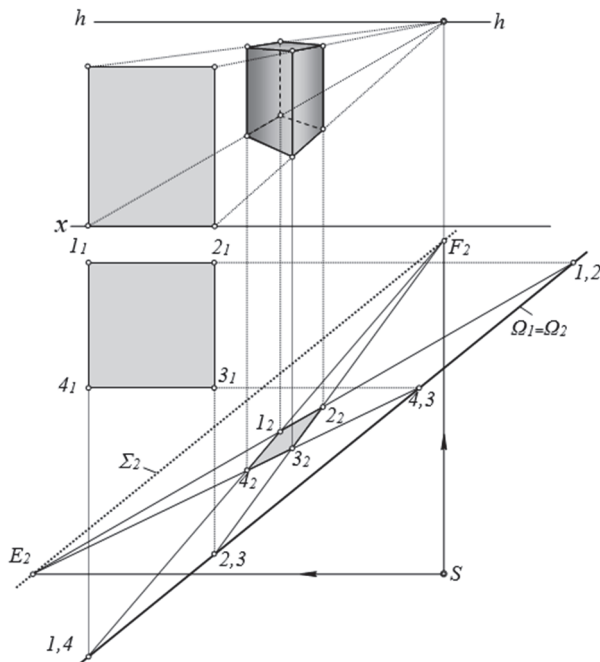


Fig. 3. Relief perspective in complex drawing

Figure 3 shows the construction of the relief perspective of a rectangular parallelepiped between the horizontal-projecting planes  $\Omega_1=\Omega_2$  and  $\Sigma_2$ . Here, point S is the center of homology, plane  $\Omega_1=\Omega_2$  is the double plane, and  $\Sigma_2$  is the boundary plane.

The relief image of the object can be drawn assuming its plane perspective as a starting point. Let's consider as an example the construction of the relief image of the  $A_k a_k$  section proposed in the plane perspective (Fig. 4). First, we choose the boundary plane  $\Sigma_2$ , parallel to the plane K of the drawing, then we draw the projection (with the center S) of the boundary point  $F_k$  on the plane  $\Sigma_2$ . The intersection points of lines  $G_k$  and  $g_k$ , which are passing through the points  $A_k$  and  $a_k$ , and points  $M_k$  and  $m_k$  are connected to the boundary point  $F_2$ .  $A_2$  and  $a_2$  projections of the points  $A_k$  and  $a_k$  on the lines  $G_k$  and  $g_k$  will determine the relief image of the section.

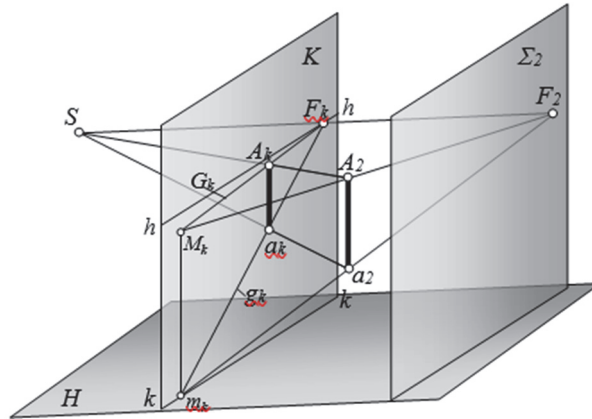


Fig.4. The transformation principle from plane perspective to the relief one

**Conclusion.** On the basis of the observed transformation, a software package has been developed to construct computer models of relief perspectives for the objects in the space in the interactive mode. The recommended software package has been tested in the graphical modeling system of AutoCAD.

### References

1. **Soghomonyan K.A.** Linear-constructive methods of shaping (geometric modeling). - Yerevan: Armenia, 1990. - 214 p.
2. **Soghomonyan K.H., Poghosyan M.Z., Bakunts M.G.** Projective Mapping of spaces on their boundary domain // Proceedings of RA NAS and NPUA. Technical Sciences Series.- Yerevan, 2021.- Vol. LXXIV, № 3. -P.300-307.
3. **Glagolev N.A.** Projective geometry. - M.: Higher school, 1963. - 268 p.
4. **Bubnova A. A.** Projective geometry. - Yalta: RIOGPA, 2016. - 84 p.
5. **Efimov N.V.** Higher geometry.- M.: FizMatLit, 2003. – 560 s.
6. **Guseva N.I. etc.** Geometry. – V.2. – M.: Academy, 2013.

*Received on 21.10.2022.*

*Sent for review on 11.11.2022.*

*Accepted for publication on 28.03.2023.*

**ԵՌԱԶԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՀՈՄՈՂՈԳ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ ԵՎ  
ՌԵԼԻԵՖԱՅԻՆ ՀԵՌԱՆԿԱՐԸ**

**Կ.Հ. Սողոմոնյան, Մ.Զ. Պողոսյան, Մ.Գ. Բակունց**

Ուսումնասիրվում են եռաչափ տարածության պրոյեկտիվ արտապատկերման մասնավոր դեպքերից մեկի՝ հոմոլոգիայի առանձնահատկությունները: Ապացուցվում է, որ հոմոլոգիայի կրկնակի հարթությունը զուգահեռ է տարածության անխակական հարթության կերպարին: Ցույց է տրվում, որ եռաչափ ողջ կիսատարածությունը հոմոլոգիայի միջոցով արտապատկերվում է այդ երկու զուգահեռ հարթություններով սահմանափակված տիրույթի վրա: Այդ արտապատկերումով ձևավորված կերպարը բավարարում է ռելիեֆային հեռանկարին ներկայացվող պայմանները, որի հետևանքով տարածության և նրա ռելիեֆային կերպարի միջև հաստատվում է հոմոլոգ կապ: Հետևաբար՝ այդ արտապատկերումով կարելի է ստանալ տարածության ռելիեֆային հեռանկարը:

Դիտարկվում են տարածությունների այնպիսի պրոյեկտիվ ձևափոխությունների սինթեզման հարցեր, որոնք թույլ են տալիս տարածության անսահմանափակ մասը արտապատկերել նրա սահմանափակ տիրույթում:

Ուսումնասիրվել են երկրաչափական այն ձևափոխությունները, որոնք թույլ կտան տարածությունն արտապատկերել դրա սահմանափակ տիրույթում: Դրանք կարող են հիմք ծառայել ռելիեֆային հեռանկարի երկրաչափական մոդելավորման ալգորիթմների մշակման և դրանց կառուցման գործընթացի ավտոմատացման համար: Այս խնդիրն ունի գործնական կարևոր նշանակություն, քանի որ ռելիեֆային կերպարի համակարգչային մոդելի առկայությունը թույլ կտա ավտոմատացնել ռելիեֆային պատկեր պարունակող օբյեկտների նախագծման գործընթացը և կազմակերպել դրանց արտադրությունը թվային կառավարմամբ հաստոցների (ինչպես նաև եռաչափ տպիչների) միջոցով:

**Առանցքային բառեր.** պրոյեկտիվ արտապատկերում, տարածության ձևափոխություն, անխակական հարթություն, կրկնակի տարրեր, հոմոլոգիա, ռելիեֆային հեռանկար:

## ГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И РЕЛЬЕФНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

К.А. Согомонян, М.З. Погосян, М.Г. Бакунц

Рассматриваются особенности одного из частных случаев проективного отображения трехмерного пространства – гомологии. Доказывается, что двойная плоскость гомологии параллельна образу несобственной плоскости пространства. Показано, что посредством гомологии вся трехмерная полуплоскость отображается на области, ограниченной этими двумя плоскостями. Этим отображением можно построить рельефную перспективу пространства.

Рассматриваются вопросы синтеза проективных преобразований, которые позволяют отобразить бесконечную часть пространства на ограниченной области.

Целью работы является изучение геометрических преобразований, позволяющих представить пространство в его ограниченном диапазоне. Эти геометрические преобразования могут служить основой для разработки алгоритмов геометрического моделирования рельефа в перспективе и автоматизации процесса их построения. Данная проблема имеет практическое значение, так как наличие компьютерной модели рельефного изображения позволит автоматизировать процесс проектирования объектов, содержащих рельефное изображение, и организовать их производство с помощью станков с цифровым управлением (а также 3D-принтеров).

**Ключевые слова:** проективное отображение, преобразование пространства, несобственная плоскость, двойные элементы, гомология, рельефная перспектива.