

UDC 62-52+513.1

ENGINEERING GRAPHICS

DOI: 10.53297/18293387-2024.2-97

AN ELEMENTARY SOLUTION TO APOLLONIUS PROBLEMS AND THE INTERSECTION OF CONICS WITH A LINE

K.H. Soghomonyan

National Polytechnic University of Armenia

A solution to the problems of Apollonius is proposed based on the concepts of elementary geometry. It is shown that the proposed solutions also allow addressing another important construction problem: constructing the intersection points of a line and conics (ellipse, hyperbola, and parabola). To solve this problem, conics are considered as a set of points equidistant from two circles.

The presented method emphasizes synthetic geometry tools—namely, compass and straightedge constructions—and avoids reliance on coordinate geometry or algebraic computations. The approach offers a clear geometric interpretation of both Apollonius' problems and line-conic intersection tasks within a unified framework. This not only provides elegant solutions but also deepens the understanding of geometric relationships through visual reasoning.

In particular, the method enables the construction of conic sections by redefining them as loci of points equidistant from two given circles. This geometric redefinition serves as an alternative to traditional conic definitions involving foci and directrices and enhances pedagogical accessibility for students and educators.

The dual application of this construction—solving both the classical Apollonius problems and the intersection of a line with conics—demonstrates the flexibility and power of elementary geometry. It is especially useful in educational contexts where the development of spatial reasoning and geometric intuition is prioritized.

Overall, the proposed solution contributes to classical geometry by providing a visually intuitive, logically consistent, and broadly applicable method for solving a family of historically significant geometric problems.

Keywords: Apollonius problems, tangency, power of a point with respect to a circle, center of similarity of circles, homothety, ellipse, hyperbola, parabola, improper point.

Preliminary Provisions and Concepts. The Apollonius problem involves constructing circles that are tangent to three arbitrarily given circles. In order to cover all special cases of the problem, we consider the line and the point as circles with infinitely large and zero radii, respectively [1].

Introduction. For the elementary solution to this problem, the following patterns are used [2]:

1□ Any line passing through the center of external homothety of two circles and the non-homothetic points of intersection of these circles have such distances from that center that their product is a constant.

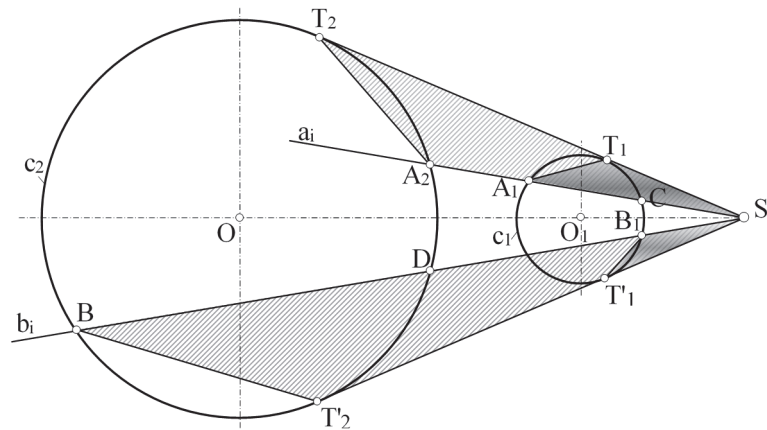


Fig.1. Preliminary Provisions

In Figure 1, let c_1 and c_2 be two circles, and let S be their external homothety center. Two arbitrary lines a_i and b_i , passing through S , intersect these circles at non-homothetic points A_1, A_2 and B_1, B_2 respectively. Let us show that $SA_1 \times SA_2 = SB_1 \times SB_2 = \text{const}$. The tangents to the given circles passing through point S have their tangency points denoted by T_1, T_2 and T'_1, T'_2 , respectively.

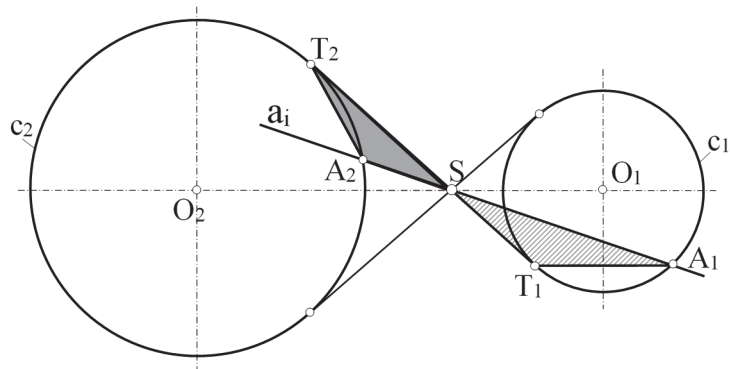


Fig. 2. Preliminary provisions

From the similarity of triangles SA_1T_1 and SA_2T_2 , we obtain: $SA_1 \times S_2 = ST_1 \times ST_2$. Similarly, from the similarity of triangles $SB_1T'_1$ and $SB_2T'_2$, we

obtain: $SB_1 \times SB_2 = ST'_1 \times ST'_2$. Since $ST_1 \times ST_2 = ST'_1 \times ST'_2 = \text{const}$, the first statement is proven.

The same pattern holds for lines passing through the internal homothety center of the two circles. This can be proven similarly using the similarity of triangles SA_1T_1 and SA_2T_2 in Figure 2.

2. All circles passing through non-homothetic points (e.g., A_{1i} , A_{2i} or B_{1i} , B_{2i}) that are collinear with the homothety center S (external or internal) of circles c_1 and c_2 (Fig. 3a,b), and through a fixed point M , all such circles, including the tangent circles e_1 and e_2 to c_1 and c_2 at these points, also pass through another point N belonging to the line MS .

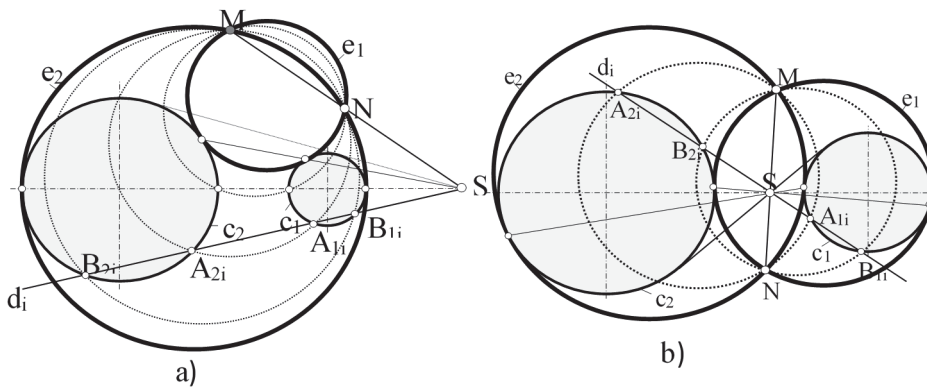


Fig. 3. Preliminary Provisions and Concepts

Indeed, from the 1st pattern, it follows that point S has the same power with respect to all these circles passing through M . Therefore, the line MS must intersect these circles at another common point N , so that the relation, $MS \times NS = SA_{1i} \times SA_{2i} = \text{const}$ holds true [3,4].

Variants of Solutions to the Apollonius Problem. The solution to all variants of the Apollonius problem is based on the following three special cases of the problem:

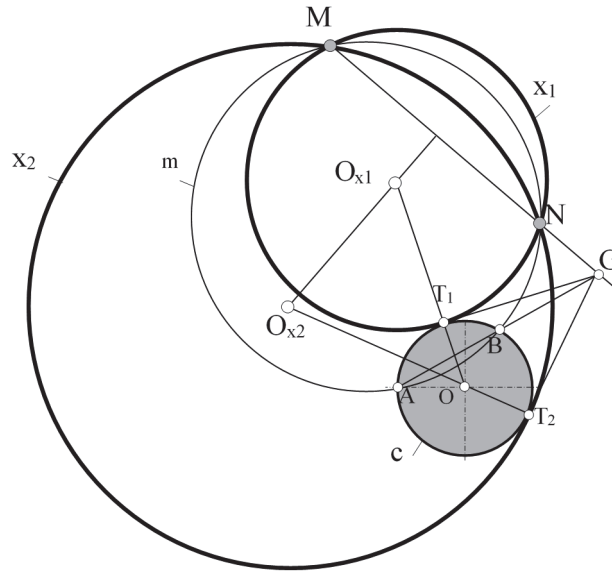


Fig. 4. Two points and a circle

a) *Two points and a circle (Fig. 4).* Given points M and N (zero-radius circles) and a circle c . The task is to construct circles passing through M and N and tangent to c .

Solution: Determine the point G that has the same power with respect to the sought circles and the given circle c . To do this, construct an arbitrary circle m passing through points M and N , which intersects the circle c at points A and B . Clearly, G will be the intersection of lines MN and AB . The points of tangency T_1 and T_2 of the tangents drawn to the circle c through point G will also be the points of tangency of the circles x_1 and x_2 to the given circle c . The centers O_{x_1} and O_{x_2} of these circles are located at the intersection points of the perpendicular bisector of the segment MN and the lines OT_1 and OT_2 [5,6].

b) *Two points and a line (Fig. 5).* Given points M and N and a line a , the task is to construct circles x_1 and x_2 passing through M and N and tangent to line a .

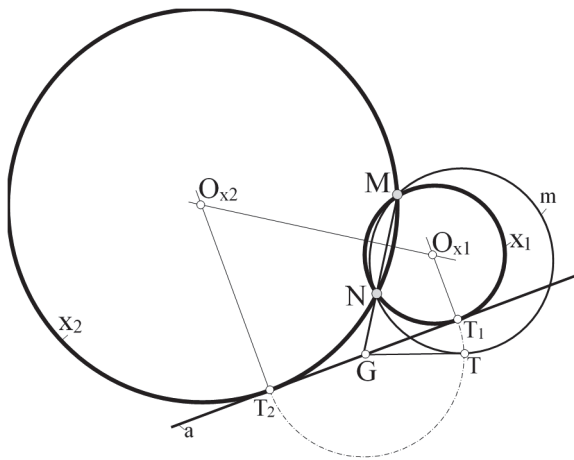


Fig. 5. Two points and a line

Solution: The intersection point G of lines MN and a will have the same power with respect to all circles passing through M and N , including the sought circles tangent to line a .

Construct an arbitrary circle m passing through points M and N . The tangent drawn from G to this circle m , denoted as GT , will be equal to segments GT_1 and GT_2 , where T_1 and T_2 are the tangency points of the sought circles with the line a . The centers O_{x1} and O_{x2} of the sought circles are located at the intersections of the perpendiculars drawn to the line a at points T_1 and T_2 with the perpendicular bisector of segment MN .

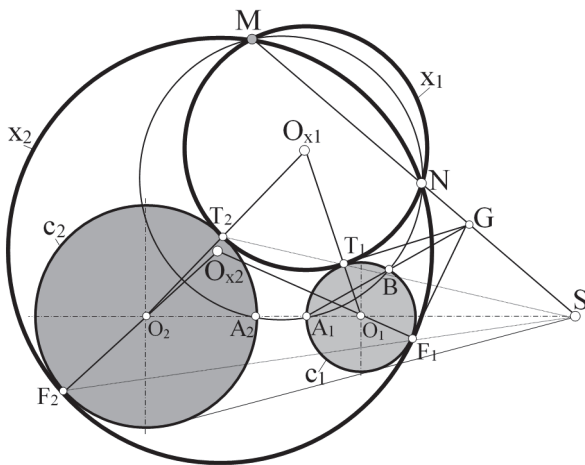


Fig. 6. Two circles and one point

c) Two circles and one point (Fig. 6). The task is to construct circles x_1 and x_2 passing through point M and tangent to the given circles c_1 and c_2 .

Solution: Construct a circle passing through point M and the non-homothetic points A_1, A_2 of the given circles and determine its intersection point N with the line MS . Clearly, the circles (x_1, x_2) passing through points M and N and tangent to one of the given circles (e.g., c_1) will also be tangent to the other circle. Thus, this problem refers to the case described in **a**).

d) Three circles.

Consider the case of the problem when it is required to construct circles tangent to three given arbitrary circles.

In the general case, this problem has eight solutions. The principle for constructing two of these solutions is illustrated in Fig. 7a.

If the radii of the given circles c_1, c_2, c_3 are reduced by the radius R_3 of the smaller circle c_3 , then we will obtain the point M and the circles g_1, g_2 . Construct the circles e_1 and e_2 passing through point M and tangent to circles g_1, g_2 (solution described in **c**). By reducing the radius of circle e_1 by R_3 and increasing the radius of circle e_2 by the same amount, we obtain the two sought circles x_1 and x_2 .

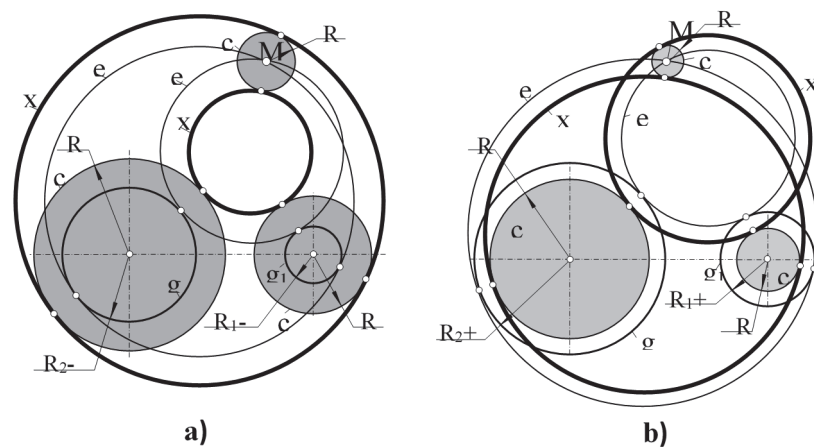


Fig. 7. Three circles

The principle for constructing the other two solutions, x_1, x_2 , is shown in Fig. 7b, where the radius of circle c_3 is reduced to a point M , while the radii of the other two circles c_1 and c_2 are increased by R_3 [7].

By applying the same principle described above, it is possible to obtain four additional solutions if, instead of the external homothety center S , the internal homothety center of the circles is used (see Fig. 3b).

Intersection Points of Conics and a Line. The Apollonius problem solving options allow to determine the intersection points of a given conic (parabola, hyperbola, ellipse) and a line using a compass and a ruler [8,9].

1. Intersection points of a parabola and a line.

A parabola is the set of all points equidistant from a point F (focus) and a line d (directrix) (see Fig. 8). It is obvious that these are the centers of circles passing through point F and tangent to line d . The intersection points X_1, X_2 of the parabola Ω and a given line a are two of these centers. The circles passing through these centers and point F will also pass through point N , which is symmetrical to F with respect to the line a . Thus, the sought points X_1 and X_2 are the centers of circles passing through points F and N , and tangent to the directrix d . These centers can be constructed using variant **b)** of the Apollonius problem (see Fig. 5).

2. Intersection points of a hyperbola and a line.

A hyperbola is the set of all points where the difference of distances to two given points F_1 and F_2 (foci) is a constant (see Fig. 9a). Consider the circle c centered at F_1 , the radius of which is equal to that constant. It is evident that the points of the hyperbola are the centers of circles passing through F_2 and tangent to circle c . The intersection points X_1, X_2 of the hyperbola Ω and the given line a are two of these centers.

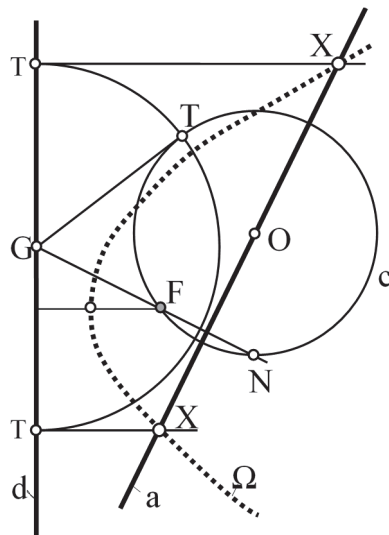


Fig. 8. Intersection points of a parabola and a line

The circles passing through these centers and point F_2 will also pass through point N , which is symmetrical to F with respect to line a . Thus, the sought points X_1 and X_2 are the centers of circles passing through points F_2 and N , and tangent to

the circle c . These centers can be constructed using variant **a**) of the Apollonius problem (see Fig. 4).

3. Intersection points of an ellipse and a line.

An ellipse is the set of all points the sum of distances of which from two given points are F_1 and F_2 (foci) is a constant, equal to the ellipse's major axis (Fig. 9b).

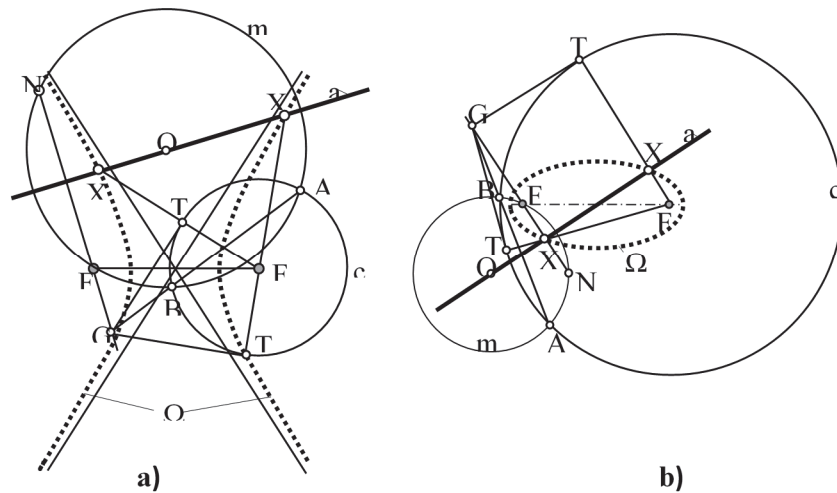


Fig. 9. Intersection points of a hyperbol and ellipse and a line

Consider the circle c centered at F_1 , the radius of which is equal to that constant. It is evident that the points of the ellipse are the centers of circles passing through F_2 and tangent to circle c . The intersection points X_1, X_2 of the ellipse Ω and the line a are two of these centers. The circles passing through these centers and point F_2 will also pass through point N , which is symmetrical to F_1 with respect to line a . Thus, the sought points X_1 and X_2 are the centers of circles passing through points F_2 and N , and tangent to the circle c . These centers can be constructed using variant **a**) of the Apollonius problem, with the difference that they are tangent to c internally.

References

1. **Согомонян К.А.** Линейно-конструктивные методы формообразования (геометрическое моделирование). – Ереван: Айастан, 1990. – 214 с.
2. **Coxter H.S.M.** The Problem of Apollonius// Amer. Math. Monthly.- 1968.- 75.-P. 5-15.
3. **Берже М.** Геометрия: Пер. с франц. – М.: Мир, 1984 – Т.1. - 560с.
4. **Берже М.** Геометрия: Пер. с франц. – М.: Мир, 1984 – Т.2. - 368с.
5. **Морозов Е.А.** Обобщенная задача Аполлония// Матем. просв. – 2019. - Вып. 23.- С. 80-111.

6. Бубнова А. А. Проективная геометрия. - Ялта: РИОГПА, 2016. – 84с.
7. Гольперин Г., Делман Ч. Повесть о трех кругах// Матем. просв. сер. 3. - Вып. 20. - М.: МЦНМО, 2016. - С. 111-134.
8. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Физматлит, 2003. – 560с.
9. Геометрия/ Н.И. Гусева и др. – Т.2. – М.: Академия, 2013.

Received on 15.05.2025.

Sent for review 20.05.2025.

Accepted for publication on 04.07.2025.

ԱՊՈԼՈՆՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԵՎ ԿՈՆԻԿՆԵՐԻ ՀԱՏՈՒՄԸ ՈՒՂՂՈՎ

Կ.Հ. Սողոմոնյան

Առաջարկվում է Ապոլոնիոսի խնդիրների լուծում, որը հիմնված է տարրական երկրաչափության գաղափարների վրա: Յուրաքանչյուր լուծումն է, որ առաջարկված լուծումները հնարավորություն են տալիս լուծել նաև մեկ այլ կարևոր կառուցման խնդիր՝ ուղիղ գծի և կոնիկ հատվածների (էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ) հատման կետերի կառուցումը: Խնդրի լուծման համար կոնիկները դիտարկվում են որպես երկու շրջաններից հավասարահեռ կետերի բազմություն:

Մեթոդը հիմնված է կառուցողական երկրաչափության սկզբունքների վրա՝ օգտագործելով միայն կոմպաս և գծապնակ, առանց վերլուծական կամ հանրահաշվական հաշվարկների: Այս մոտեցումը թույլ է տալիս մեկ միասնական համակարգում լուծել թե՛ Ապոլոնիոսի դասական խնդիրը, թե՛ ուղիղ գծի և կոնիկների հատման հարցը՝ ապահովելով տեսողական ընկալմամբ խոր ըմբռնում:

Հատկապես արժեքավոր է այն փաստը, որ կոնիկները սահմանվում են որպես երկու շրջաններից հավասար հեռավորությամբ գտնվող կետերի բազմություն, ինչը հանդես է գալիս որպես այլընտրանքային սահմանում՝ կիզակետի և ուղղորդի դասական մոդելին: Սա հեշտացնում է ուսուցման գործընթացը և զարգացնում երկրաչափական պատկերացումները:

Ներկայացված մեթոդի կրկնակի կիրառելիությունը՝ լուծել ինչպես Ապոլոնիոսի խնդիրները, այնպես էլ ուղիղների և կոնիկների հատման կետերը, վկայում է տարրական երկրաչափության ճկունության ու արդյունավետության մասին:

Ընդհանուր առմամբ, այս մոտեցումը նպաստում է դասական երկրաչափության զարգացմանը՝ տրամադրելով պարզ, տեսանելի և կառուցողական եղանակ՝ պատմական նշանակությամբ խնդիրների լուծման համար:

Առանցքային բաներ. ապոլոնյան խնդիրներ, շրջափում, կետի աստիճան շրջանագծի նկատմամբ, շրջանագծերի նմանության կենտրոն, նմանագրություն, էլիպս, հիպերբոլ, պարաբոլ, անիսկական կետ:

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АПОЛЛОНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КОНИК ПРЯМОЙ

К.А. Согомонян

Предлагается решение задач Аполлония, основанное на понятиях элементарной геометрии. Показано, что предложенные решения позволяют также решить другую важную задачу построения: нахождение точек пересечения прямой с коническими сечениями (эллипсом, гиперболой и параболой). Для решения этой задачи конические сечения рассматриваются как множество точек, равноудалённых от двух окружностей.

Представленный метод акцентирует внимание на синтетической геометрии — построениях с помощью циркуля и линейки, без использования координатной геометрии или алгебраических вычислений. Такой подход обеспечивает наглядное геометрическое понимание как задач Аполлония, так и задач пересечения прямой с коническими сечениями в единой системе. Это не только приводит к элегантным решениям, но и углубляет понимание геометрических связей за счёт визуального мышления.

В частности, метод позволяет построить конические сечения, переопределив их как геометрическое место точек, равноудалённых от двух заданных окружностей. Эта геометрическая интерпретация служит альтернативой традиционным определениям коник через фокусы и директрисы и делает материал более доступным для обучения.

Двойное применение предложенного метода — решение задач Аполлония и построение точек пересечения прямой с кониками — демонстрирует универсальность и силу элементарной геометрии. Метод особенно полезен в образовательных целях, где важны пространственное мышление и геометрическая интуиция.

В целом, предложенное решение вносит вклад в классическую геометрию, предлагая наглядный, логически стройный и универсальный способ решения исторически значимых задач.

Ключевые слова: задачи Аполлония, касание, степень точки относительно окружности, центр подобия окружностей, гомотетия, эллипс, гипербола, парабола, несобственная точка.